תרגיל 2

13 במרץ 2018

1. מצאו את הפתרונות הכלליים של המשוואות הבאות:

   (א) $y' = \frac{y}{x}$.

   פתרון:
   $$y' - \frac{1}{x}y = 0$$
   נסמן $a(x) = -\frac{1}{x}$

   אזי $A(x) = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x$

   והפתרון הוא: $y = ce^{\ln x} = ce^{\ln x} = cx$

   (ב) $y' = (x+1)\,y$.

   פתרון:
   $$y' - (x+1)y = 0$$
   נסמן $a(x) = -x - 1$

   אזי $A(x) = -\frac{x^2}{2} - x$

   והפתרון הוא: $y = ce^{\frac{x^2}{2}+x}$

2. מצאו את הפתרונות הכלליים של המשוואות הבאות: (שימו לב, באחד התרגילים יופיע אינטגרל שלא ניתן לבטאו באמצעות פונקציות אלמנטריות, ולכן עליכם להשאיר את התשובה עם האינטגרל)

   (א) $y' = \frac{y}{x} + 1$.

   פתרון:
   $$y' - \frac{1}{x}y = 1$$
   נסמן: $a(x) = -\frac{1}{x}, b(x) = 1$

   אזי: $A(x) = -\ln x$

   ונקבל: $y = e^{\ln x}(\int e^{-\ln x} \cdot 1dx + c) = x(\int \frac{1}{x}dx + c) = x\ln x + cx$

(ב) $y' + xy - x^2 = 0$.

פתרון:

$$y' + xy = x^2$$

נסמן $a(x) = x, b(x) = x^2$

אזי $A(x) = \frac{x^2}{2}$

ולכן: $y = e^{-\frac{x^2}{2}}(\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx + c)$

את האינטגרל: $\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx$ אנחנו לא יודעים לחשב (לא ניתן לבטא אותו באמצעות פונקציות אלמנטריות), ולכן נשאיר את הפתרון כך.

(ג) $y' + \frac{y}{x} = 6x^2$.

פתרון:

$$a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = 6x^2$$

$$A(x) = \ln x$$

לכן: $y = e^{-\ln x}(\int e^{\ln x} \cdot 6x^2 dx + c) = \frac{1}{x}(\int 6x^3 dx + c) = \frac{1}{x}(\frac{3}{2}x^4 + c) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{c}{x}$

3. מצאו את הפתרונות הפרטיים של המשוואות הבאות, המקיימים $y(0) = 0$:

(א) $y' \cos x - y \sin x = 1$. בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

פתרון:

נסדר את המשוואה:

$$y' - (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}$$

$$a(x) = -\tan x, b(x) = \frac{1}{\cos x}$$

לכן: $A(x) = \ln \cos x$. נשים לב שבתחום הנתון $\cos x$ חיובי, ולכן לא צריך ערך מוחלט.

ונקבל: $y = e^{-\ln \cos x}(\int e^{\ln \cos x} \frac{1}{\cos x} dx + c) = \frac{1}{\cos x}(\int 1 dx + c) = \frac{x + c}{\cos x}$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל: $c + 0 = 0$ ולכן $c = 0$.

כלומר, הפתרון של בעיית ההתחלה הוא: $y = \frac{x}{\cos x}$

(ב) $y' - 2y = e^{3x}$.

פתרון:

$$a(x) = -2, b(x) = e^{3x}$$

לכן $A(x) = -2x$

נקבל: $y=e^{2x}(\int e^{-2x}e^{3x}dx+c)=e^{2x}(\int e^{x}dx+c)=e^{2x}(e^{x}+c)=$
$e^{3x}+ce^{2x}$.

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$0=y(0)=1+c$$

לכן $c=-1$

והפתרון הפרטי הוא: $y=e^{3x}-e^{2x}$

4. חומר כימי מסוים מיוצר בקצב קבוע, אך מתפרק בקצב פרופורציונלי לכמות החומר הקיים. נסמן את כמות החומר בזמן t ב- $C(t)$ ($Camut$ באנגלית). כמות החומר מקיימת את המשוואה:

$$C'=a-bC$$

כאשר $a,b>0$.

(א) מצאו את פתרון המשוואה, בתנאי $C(0)=K$ ($K\geq 0$).

פתרון:

נפתור את המד"ר הלינארית ונקבל: $C=\frac{a}{b}-ce^{-bt}$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל: $K=C(0)=\frac{a}{b}-c$

לכן $\frac{a}{b}-K$ והפתרון הפרטי הוא: $C=\frac{a}{b}-(\frac{a}{b}-K)e^{-bt}$

(ב) הוכיחו שלכל K מתקיים:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}C(t)=\frac{a}{b}$$

פתרון:

כאשר $t\to\infty$, $e^{-bt}\to 0$ ולכן $C(t)\to\frac{a}{b}$