

תרגיל 5

להגשה עד 6.12.15

שאלה 1

תהי (\mathbb{X}, \cdot) חבורה סופית. לכל $E \subseteq \mathbb{X}$ ו- $a \in \mathbb{X}$ תהי:

$$a \cdot E := \{a \cdot x : x \in E\}$$

(ההזזה של E על ידי a .)

הוכיחו **קיום** מידה חיובית **יחידה** μ מעל $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ כך ש: $\mu(\mathbb{X}) = 1$ ולכל $E \subseteq \mathbb{X}$:

$$\mu(a \cdot E) = \mu(E)$$

הערה: μ כזו נקראת אינוריאנטית תחת הזזות.

שאלה 2

תנו דוגמא **לאי קיום** משפט ההתכנסות המונוטונית עבור סדרה **יורדת** של פונקציות מדידות ואי שליליות.

שאלה 3

יהיו $(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית, $E \in \mathbb{A}$ כך ש: $\mu(E) > 0$ וגם: $\mu(\mathbb{X} \setminus E) > 0$.
נגדיר סדרה $f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי: לכל $k \in \mathbb{N}$:

$$f_{2k} := \mathbf{1}_{E^c}$$
$$f_{2k-1} := \mathbf{1}_E$$

מה תהיה המסקנה מהלמה של פאטו במקרה זה?

שאלה 4

תהי $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת פונקציות מדידות אי שליליות מעל מרחב מידה חיובית $(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$.
הוכיחו:

1. אם $f_n \searrow f$ וקיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש: $\int_{\mathbb{X}} f_N d\mu < \infty$ אזי: $\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f d\mu$.

2. אם $f_n \rightarrow f$ ולכל $n \in \mathbb{N}$: $f_n \leq f$ אזי: $\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f d\mu$.

בהצלחה!!