

**פיזיקה למתמטיקאים – 320-88 – מבחן לדוגמה**

**מרצים:** ד"ר ברוך ברזל, מר ניר שרייבר

**משך המבחן:** 3 שעות

**חומר עזר מותר בשימוש:** מחשבון, דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט (עד 5 דפים).

ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות (רק שלוש). כל שאלה – 33 נקודות.  
ניתן לענות, בנוסף על השלוש הנ"ל, גם על שאלה 5 (שאלת בונוס - לא חובה). בונוס – 10 נקודות.  
אנא סמנו בברור על איזה שאלות בחרתם להשיב והקיפו את תשובותיכם הסופיות.

1. לווין מקיף כוכב תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי  $U(r) = -\frac{c}{r}$ .
- רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת במונחים של הקואורדינטות הפולאריות  $r, \theta$ .
  - הראו כי התנע הזוויתי, דהיינו התנע הצמוד לקואורדינטה  $\theta$ , נשמר.
  - כעת העזרו בתנע הזוויתי ורשמו את הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת.
  - בזמן  $t = 0$  ללווין היתה מהירות זוויתית  $\dot{\theta}(t = 0) = q$  ו- $r(t = 0) = r_0$ . מהי האנרגיה והתנע הזוויתי של הלווין?
  - מה יהיו המרחקים המינימלי והמקסימלי בין הלווין לכוכב?

2. מסה  $m$  חופשית לנוע במישור  $x, y$ , ומחוברת לקפיץ שקצהו בנקודה  $(0, 0, z_0)$  על ציר  $z$ .
- רשמו את ההמילטוניאן של המערכת.
  - קבלו את משוואות התנועה (המילטון). הראו כי התנע הזוויתי נשמר.
  - עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי  $L_0$ , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?
  - חשבו את תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל של הפוטנציאל מן הסעיף הקודם.
  - נתון כי האנרגיה התחילית היא  $E_0$ . מהו טווח המרחקים "המותר"  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  של המסה מן הראשית?

3. חלקיק קוואנטי חופשי מצוי בפוטנציאל  $V(x) = 0$  לכל  $-\infty < x < \infty$ .
- רשמו את משוואת שרדינגר עבור החלקיק וקבלו את המצבים העצמיים והערכים העצמיים של ההמילטוניאן.
  - האם במקרה זה קיימות רמות אנרגיה בדידות?
  - נתון כי בזמן  $t = 0$  פונקציית הגל נתונה על ידי  $\psi(x, t = 0) = Ae^{-\alpha|x|}$ . מצאו את הקבוע  $A$ .
  - מהי צפיפות ההסתברות  $P(E)$  למדוד עבור החלקיק את האנרגיה  $E$ ?

4. המצב (המנורמל) של חלקיק קוואנטי נתון על ידי
- $$|\psi\rangle = i \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4}}$$
- אופרטור המיקום הוא  $x$  ואופרטור התנע הוא  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ .
- חשבו את תוחלת המיקום  $\langle x \rangle$  של החלקיק.
  - חשבו את תוחלת התנע  $\langle p_x \rangle$ .
  - הראו כי

$$|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

- מצב עצמי של  $p_x$ . מהו הערך העצמי המתאים?
- ד. מהי צפיפות ההסתברות  $P(p_x = p_0)$  למדידה של תנע  $p_0 = \hbar k$  עבור החלקיק (במצב  $|\psi\rangle$ ). ניתן להסתפק בביטוי אינטגרלי – אין צורך לפתור את האינטגרל.

**שאלת בונוס**

5. אופנוען נוסע במהירות  $v$  בסיבוב שרדיוסו  $R$  בכביש ללא חיכוך. מה צריכה להיות זווית ההטיה של הכביש על מנת שהאופנוען לא יחליק?

עד כאן המבחן לדוגמה – השאלות הבאות הן סתם בשביל תרגול נוסף:

6. למערכת קוואנטית שני מצבים אפשריים  $|x\rangle$  ו- $|y\rangle$  (מנורמלים  $\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1$ ;  $\langle x|y\rangle = 0$ ) ובזמן  $t = 0$  נתון כי מצב המערכת הוא  $|\psi(0)\rangle = |x\rangle$ . נתון האופרטור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

- א. תארו את מצב המערכת ב- $t = 0$  באמצעות מצבים עצמיים של  $A$ .
- ב. מהם ערכי האנרגיה התצפית האפשריים ומהי ההסתברות למדוד כל אחד מהם?
- ג. הראו במפורש תוך שימוש בסעיף ב' כי תוחלת המדידה מקיימת  $\langle x|A|x\rangle$ .
- ד. נתון כי אופרטור הקידום בזמן של המערכת הוא  $U(t) = e^{At}$ . רשמו את מצב המערכת בזמן  $t$ , דהיינו  $|\psi(t)\rangle$ , כקומבינציה לינארית (תלויה בזמן) של וקטורים עצמיים של  $A$ .
- ה. מהו אורך החיים של המצב  $|x\rangle$ ? (כלומר הזמן האופייני לכך שמערכת במצב  $|\psi\rangle = |x\rangle$  תיהפך למערכת "מעורבבת" שבה יש גם ייצוג ל- $|y\rangle$ , רמז:  $\langle y|\psi(t)\rangle$ )

7. מערכת של שתי מסות  $m_1$  ו- $m_2 = 2m_1$  מחוברות על ידי מוט קשיח וחסר מסה שאורכו  $L$ . המסות חופשיות לנוע במרחב הדו-מימדי  $(x, y)$ , (כלומר פוטנציאל אפס) תחת האילוץ של המוט הקשיח (מוט ישר, בלתי עקום ובלתי מתח).  
 א. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת בקואורדינטות הקרטזיות הרגילות  $x_1, y_1$  ו- $x_2, y_2$  עבור  $m_1$  ו- $m_2$  בהתאמה. כיצד מתבטא האילוץ של המוט? כמה קואורדינטות מוכללות דרושות לתיאור המערכת?  
 ב. כעת עברו לתיאור המערכת על ידי הקואורדינטות המוכללות: מרכז המסה  $\vec{R}_{CM}$  ומהירות הסיבוב סביב מרכז המסה  $\omega$ . תזכורת:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

- רשמו את הלגראנז'יאן במערכת זו.
- ג. הראו את שימור התנע הקווי  $\vec{P}_{CM} = M \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt}$ .
- ד. מצאו את התנע הזוויתי והראו שגם הוא נשמר.