מבחן בדידה קיץ תשפא-פתרון

כ"ב אלול תשפ"א, 30.8.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

<u>תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק</u>..

<u>ניתן לענות משני צידי הדף</u>..

בהצלחה!

1. (20 נק') תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) $A\backslash(B\backslash A) = A\backslash(C\backslash A)$.

פתרון:

הוכחה: נשים לב ש $(B\backslash A) \subseteq A^c$ כי כל איבר ב $B\backslash A$ הוא איבר שלא ב A ולכן $A \subseteq (B\backslash A)^c$ ולכן

$$A = A \cap A \subseteq A \cap (B\backslash A)^c \subseteq A$$

ולכן מכיוון ש $A = A \cap (B\backslash A)^c$ ומכיוון ש $A \cap (B\backslash A)^c = A\backslash(B\backslash A)$ קיבלנו בסה"כ $A = A\backslash(B\backslash A)$. אותו הוכחה מראה ש $A = A\backslash(C\backslash A)$ ולכן שהם שוות אחת לשניה (ושוות ל A).

(ב) $P(A\backslash P(B)) \neq P(A)\backslash(P(B) \cup P(P(B)))$.

פתרון:

הוכחה: קבוצה ריקה שייכת בכל קבוצת חזקה ולכן: $\emptyset \in P(A\backslash P(B))$. מצד שני $\emptyset \notin P(A)\backslash(P(B) \cup P(P(B)))$ ולכן הם לא שווים (נימוק מפורט: $\emptyset \in P(A)$ וגם $\emptyset \in P(B)$ ולכן $\emptyset \in P(A)$ וגם $\emptyset \in P(B) \cup P(P(B))$ ולכן $\emptyset \notin P(A)\backslash(P(B) \cup P(P(B)))$).

(ג) אם $A \subseteq B$ וגם $A\backslash C \neq \emptyset$ אזי $B\backslash C \neq \emptyset$.

פתרון:

הוכחה: נניח $A \subseteq B$ וגם $A\backslash C \neq \emptyset$ צ"ל $B\backslash C \neq \emptyset$. נב"ש ש $B\backslash C = \emptyset$ לכן $B \subseteq C$ (אם $C \nsubseteq B$ אז יש $x \in B$ וגם $x \notin C$ ולכן $x \in B\backslash C$). בצירוף ההנחה הראשונה ש $A \subseteq B$ נקבל $A \subseteq C$ (הכלה היא טרנזיטיבית) ולכן $A\backslash C = \emptyset$ בסתירה להנחה הנוספת $A\backslash C \neq \emptyset$.

(ד) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

פתרון:

הוכחה: לכל X מתקיים: $X \in P(A \cap B)$ אמ"מ $X \subseteq A \cap B$ אמ"מ $X \subseteq B$ וגם $X \subseteq A$ אמ"מ $X \in P(B)$ וגם $X \in P(A)$ אמ"מ $X \in P(A) \cap P(B)$.

2. (21 נק') נגדיר יחס S על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ כך: לכל $a, b \in \mathbb{R}$

$$aSb \iff [(a = b) \vee (b - a > 1)]$$

(א) הוכיחו כי S יחס סדר חלקי על $\mathbb{R}$.

פתרון:

- רפלקסיביות: לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $a = a$ ולכן aSa.
- אנטי סימטריות: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש aSb וגם bSa. נב"ש ש $a \neq b$ אז נקבל מהנתונים כי $b - a > 1$ וגם $a - b > 1$ כלומר $b > a + 1$ וגם $a > b + 1$ סתירה.
- טרנזיטיביות: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש aSb וגם bSc וצ"ל aSc. אם $a = b$ או $b = c$ סיימנו. אחרת, לפי הנתונים נקבל ש $c - b > 1$ וגם $b - a > 1$ ולכן

$$c - a = (c - b) + (b - a) > 1 + 1 > 1$$

ולכן aSc כנדרש.

(ב) מצאו את כל האיברים המינימאליים בקבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ (שמוכלת ב $\mathbb{R}$), לפי היחס S (הניחו כי $0 \notin \mathbb{N}$).

פתרון:

טענה: $1, 2$ הם מינימאליים והם היחידים.

הוכחה: אם $xS1$ ו $x \neq 1$ אז $1 - x > 1$ כלומר $x < 0$ אבל x טבעי. סתירה. באופן דומה, אם $xS2$ ו $x \neq 2$ אז $2 - x > 1$ כלומר $x < 1$ אבל x טבעי. סתירה. לכן $1, 2$ מינימאלים.

נניח כעת x מינימלי ונראה ש $x \in \{1, 2\}$. נב"ש ש $x \geq 3$ אזי $1Sx$ כי $x - 1 \geq 3 - 1 = 2 > 1$ ולכן x אינו מינמאלי. סתירה.

(ג) האם לקבוצה

$$(0,1)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<1\}$$

יש חסם עליון (sup)? אם כן, מצאו אותו. אחרת, הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

טענה: לא קיים $\sup(0,1)$

הוכחה: ראשית, נציין ש 2 חסם מלעיל של $(0,1)$ כיוון שלכל $0<x<1$ מתקיים $2-x>2-1=1$ ולכן $xS2$.
שנית, נציין שגם 2.5 חסם מלעיל של $(0,1)$ כיוון שלכל $0<x<1$ מתקיים $2.5-x>2.5-1=1.5>1$ ולכן $xS2.5$.

כעת, נב"ש שקיים $\sup(0,1)$, נסמנו M. אזי M חסם מלעיל הקטן ביותר ובפרט $MS2$.

- אם $M=2$ נקבל סתירה שהרי $(2,2.5)\notin S$ (וגם 2.5 הוא חסם מלעיל).
- אם $M\neq 2$ אז מתקיים $2-M>1$ ולכן $1>M$ ועבור $\max\{M,0\}<x<1$ (קיים כזה כי $1>M$) מתקיים כי $x\in(0,1)$ ומתקיים ש $M-x\leq M-M=0$ ולכן $(x,M)\notin S$ בסתירה לכך ש M חסם מלעיל של $(0,1)$.

3. (21 נק') תהא $B\neq\emptyset$ קבוצה לא ריקה ונסמן $X=B^B$ את קבוצת כל הפונקציות מ B ל B. נגדיר יחס $\sim$ על X כך: לכל $f,g\in X$ מתקיים: $f\sim g$ אם ורק אם קיימת $h\in X$ הפיכה כך ש $f\circ h=h\circ g$.

(א) הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות על X.

פתרון:

- רפלקסיביות: לכל $f\in X$ מתקיים ש $f\sim f$ שהרי עבור פונקצית הזהות I מתקיים $f\circ I=f=I\circ f$.
- סימטריות: יהיו $f,g\in X$ כך ש $f\sim g$ וצ"ל $g\sim f$. מהנתון קיימת $h\in X$ הפיכה כך ש $f\circ h=h\circ g$ ולכן גם h^{-1} (קיימת) והפיכה ואם נרכיב אותה בשני הצדדים של השוויון

$$h^{-1}\circ f=h^{-1}\circ(f\circ h)\circ h^{-1}=h^{-1}\circ(h\circ g)\circ h^{-1}=g\circ h^{-1}$$

כאשר השיוונות באדום נובעים מכך שהרכבת פונקציות היא קיבוצית ו h^{-1} הרכבה עם h (בשני הכיוונים) היא הזהות. מכאן ש

$$g\circ h^{-1}=h^{-1}\circ f$$

ולכן $g\sim f$.

- טרנזיטיביות: יהיו $f_1,f_2,f_3\in X$ כך ש $f_1\sim f_2$ וגם $f_2\sim f_3$. צ"ל $f_1\sim f_3$. לפי הנתונים, קיימות h_1,h_2 הפיכות כך ש

$$f_1\circ h_1=h_1\circ f_2$$

וגם

$$f_2\circ h_2=h_2\circ f_3$$

ולכן

$$f_1=h_1\circ f_2\circ h_1^{-1}$$

וגם

$$f_2=h_2\circ f_3\circ h_2^{-1}$$

וביחד

$$f_1=h_1\circ h_2\circ f_3\circ h_2^{-1}\circ h_1^{-1}=(h_1\circ h_2)\circ f_3\circ(h_1\circ h_2)^{-1}$$

ולכן

$$f_1\circ(h_1\circ h_2)=(h_1\circ h_2)\circ f_3$$

ומכיוון ש $(h_1\circ h_2)$ הפיכה (כהרכבה של הפיכות) נקבל $f_1\sim f_3$ כמבוקש.

(ב) עבור פונקצית הזהות $I \in X$ מצאו את מחלקת השקילות $[I]_\sim$.

פתרון:

טענה: $[I]_\sim = \{I\}$. הוכחה: $(\supseteq)$ מתקיים מרפלקסיביות היחס $\sim$. $(\subseteq)$ תהא $g \in X$ כך ש $g \sim I$ וצ"ל $I = g$. מכך ש $g \sim I$ נסיק שקיימת $h \in X$ הפיכה כך ש

$$I \circ h = h \circ g$$

ואם נרכיב h^{-1} משמאל נקבל

$$I = h^{-1} \circ I \circ h = g$$

כמבוקש.

(ג) תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in B$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$. הוכיחו כי $|[f]_\sim| = |B|$.

פתרון:

תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in B$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$, כלומר f פונקציה קבועה, כלומר קיים $b_0 \in B$ כך שלכל $x \in B$ מתקיים $f(x) = b_0$.

טענה: מחלקת השקילות $[f]_\sim$ היא כל הפונקציות הקבועות. כלומר $[f]_\sim = \{g \in X \mid \exists b \in B : \forall x \in B : g(x) = b\}$

הוכחה: $(\subseteq)$ תהא $g \in [f]_\sim$ אז קיימת $h \in X$ הפיכה כך ש $f \circ h = h \circ g$. $h^{-1} \circ f \circ h = g$ ולכן לכל $x \in B$ מתקיים

$$g(x) = \left(h^{-1} \circ f \circ h\right)(x) = h^{-1}\left(f\left(h(x)\right)\right)$$

אבל לכל x מתקיים ש $f\left(h(x)\right) = b_0$ ולכן

$$g(x) = h^{-1}\left(f\left(h(x)\right)\right) = h^{-1}\left(b_0\right)$$

ולכן g קבועה על הערך $h^{-1}\left(b_0\right)$.

$(\supseteq)$ תהא g פונקציה קבועה. אזי קיים $b \in B$ כך שלכל $x \in B$ מתקיים $g(x) = b$. נגדיר $h : B \to B$ שתחליף בין b ל b_0 ואת שאר האיברים תשלח לעצמם. כלומר

$$h(x) = \begin{cases} b_0 & \text{if} x = b \\ b & \text{if} x = b_0 \\ x & \text{else} \end{cases}$$

והיא הפיכה ומתקיים שלכל $x \in B$

$$\left(f \circ h\right)(x) = f\left(h(x)\right) = b_0$$

ומצד שני

$$\left(h \circ g\right)(x) = h\left(g(x)\right) = g(b) = b_0$$

ולכן $f \circ h = h \circ g$ ולכן $g \sim f$ ולכן $g \in [f]_\sim$ כנדרש.

כעת, נגדיר פונקציה $H : [f]_\sim \to B$ המוגדרת ע"י $H(g) = g(b_0)$ ונראה שהיא חח"ע ועל (ולכן $|[f]_\sim| = |B|$ כנדרש).

- טענה: H חח"ע: יהיו $g_1, g_2 \in [f]_\sim$ שונות. אזי מכיוון שהם קבועות, מתקיים כי $g_1(b_0) \neq g_2(b_0)$ ולכן $H(g_1) \neq H(g_2)$.
- טענה H על: יהא $b \in B$ אז הפונקציה הקבועה על b שייכת למחלקת השקילות $[f]_\sim$ והיא תשמש כמקור.

4. (24 נק') נסמן $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את קבוצת כל הפונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$. נגדיר פונקציה $H : A \times A \to A \times A$ על ידי הכלל:

$$H\left((f_1, f_2)\right) = \left(f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1\right)$$

(א) הוכיחו או הפריכו: H פונקציה חח"ע.

פתרון:

הפרכה: ניקח פונקציה הפיכה, למשל $f_1(x)=x+1$ אז ההופכית שלה היא $f_2(x)=x-1$ ולכן

$$H\left(\left(f_1,f_2\right)\right)=\left(f_1\circ f_2,f_2\circ f_1\right)=(I,I)$$

וגם

$$H\left(\left(f_2,f_1\right)\right)=\left(f_2\circ f_1,f_1\circ f_2\right)=(I,I)$$

ולכן $(f_1,f_2)\neq(f_2,f_1)$ נשלחים לאותה תמונה (I,I).

(ב) מצאו פונקציה $g\in A$ כך ש $(I,g)\notin \mathrm{Im}H$ (כאשר $I\in A$ היא פונקצית הזהות).

פתרון:

נגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי הכלל $g(x)=0$ (הפונקציה הקבועה על 0).

טענה: $(I,g)\notin \mathrm{Im}H$

הוכחה: נב"ש $(I,g)\in \mathrm{Im}H$ אזי קיים מקור (f_1,f_2) כך ש $H\left(\left(f_1,f_2\right)\right)=(I,g)$ כלומר,

$$H\left(\left(f_1,f_2\right)\right)=\left(f_1\circ f_2,f_2\circ f_1\right)=(I,g)$$

זה אומר ש $f_2\circ f_1=g$ וגם $f_1\circ f_2=I$. מכך ש $f_1\circ f_2=I$ נסיק ש f_2 חח"ע ו f_1 על. לכן קיימים x_1,x_2 כך ש $f_1(x_1)=1,f_1(x_2)=2$ ולכן

$$\begin{aligned}\left(f_2\circ f_1\right)(x_1)&=f_2(f_1(x_1))=f_2(1)\\ \left(f_2\circ f_1\right)(x_2)&=f_2(f_1(x_2))=f_2(2)\end{aligned}$$

ומכיוון ש f_2 חח"ע $f_2(1)\neq f_2(2)$ ובפרט אחד מהם שונה מ 1. מצד שני $g(x_1)=g(x_2)=1$ ולכן $f_2\circ f_1\neq g$.

(ג) תהיינה $g_1,g_2\in A$ פונקציות <u>הפיכות</u>. הוכיחו/הפריכו: $(g_1,g_2)\in \mathrm{Im}H$.

פתרון:

הפרכה: ניקח $g_1=I$ ו g_2להיות הפונקציה ההפיכה המוגדרת לפי הכלל $g_2(x)=x+1$. נב"ש $(g_1,g_2)\in \mathrm{Im}H$ אז קיים מקור (f_1,f_2) כך ש $H\left(\left(f_1,f_2\right)\right)=(g_1,g_2)$כלומר,

$$H\left(\left(f_1,f_2\right)\right)=\left(f_1\circ f_2,f_2\circ f_1\right)=(g_1,g_2)$$

זה אומר ש $f_2\circ f_1=g_1$ וגם $f_1\circ f_2=I$. בגלל ש $f_2\circ f_1=g_1$ (וg_1 הפיכה) נסיק ש f_1 חח"ע ו f_2 על. ובגלל $f_1\circ f_2=I$ (ו I הפיכה) נסיק ש f_2 חח"ע ו f_1 על. סה"כ קיבלנו ש f_1,f_2 שתיהן חח"ע +על ולכן הפיכות. מכיוון ש $f_1\circ f_2=I$ נקבל שהן הופכיות אחת של השניה ולכן $f_2\circ f_1=I\neq g_2$ סתירה.

(ד) מצאו את העוצמה של $\mathrm{Im}H$ (התשובה חייבת להיות אחת מהבאות: מספר n טבעי או אפס, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$).

פתרון:

מצד אחד $\mathrm{Im}H\subseteq A\times A$ ולכן

$$|\mathrm{Im}H|\leq|A\times A|=|A|\cdot|A|=\aleph^{\aleph}\cdot\aleph^{\aleph}=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$$

מצד שני: $\{(f,f)\mid f\in A\}\subseteq \mathrm{Im}H$ מכיוון שלכל $f\in A$ מתקיים ש $H\left((f,I)\right)=(f,f)$ ולכן

$$|A|=|(f,f)\mid f\in A|\leq|\mathrm{Im}H|$$

השיוון האדום מיידי. בסה"כ קיבלנו $2^{\aleph}=|A|\leq|\mathrm{Im}H|\leq 2^{\aleph}$ ולכן לפי ק.ש.ב $|\mathrm{Im}H|=2^{\aleph}$.

5. הגדרה: קבוצה $C\subseteq\mathbb{R}$ תקרא <u>מגניבה</u> אם: לכל $x_1,x_2\in C$ כך ש $x_1\neq x_2$ מתקיים ש $x_1-x_2\notin\mathbb{Q}$.

(א) (5 נק') הוכיחו שקיימת קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}$ מגניבה וגם ש S אינה מוכלת באף קבוצה מגניבה אחרת.

פתרון:

נגדיר $\mathcal{O}$ אוסף הקבוצות המגניבות, סדורה ע"י הכלה. מתקיים כי $\{\emptyset\}\subseteq\mathcal{O}$ שרשרת ולכן היא מוכל בשרשרת מקסימאלית $\mathcal{C}$. נגדיר $C=\cup_{C'\in\mathcal{C}}c'$

טענה: C מגניבה.

הוכחה: יהיו $x_1,x_2\in C$ שונים. אזי קיימות קבוצות בשרשרת C_1',C_2' כך ש $x_1\in C_1',x_2\in C_2'$. מכיוון שזו שרשרת, נניח בה"כ ש $C_1'\subseteq C_2'$ ולכן $x_1,x_2\in C_2'$ ולכן ההפרש בינהן אינו רציונאלי מכיוון ש C_2' מגניבה.

טענה: C מגניבה מקסימאלית עם יחס ההכלה ולכן היא לא מוכלת באף קבוצה מגניבה אחרת.

הוכחה: נב"ש כי קיימת $\hat{C}$ קבוצה מגניבה שמכילה ממש את C אזי $\mathcal{C}\cup\left\{\hat{C}\right\}$ מכילה ממש את $\mathcal{C}$ וגם היא מוכלת ב $\mathcal{O}$ וגם היא שרשרת. למה שרשרת? כי לכל שתי קבוצותC_1',C_2' ב $\mathcal{C}\cup\left\{\hat{C}\right\}$ אם $C_1',C_2'\in\mathcal{C}$ אז אחת מוכלת בשניה כי $\mathcal{C}$שרשרת.

אחרת $C_1'\in\mathcal{C}$ וגם $C_2'=\hat{C}$ (המקרה הנוסף דומה) ואז

$$C_2'\subseteq C\subseteq\hat{C}$$

וסיימנו.

(ב) (15 נק') נתייחס ל S מהסעיף הקודם. ענו על השאלות הבאות:

i. הוכיחו שלכל $y\in\mathbb{R}$ קיים $x\in S$ כך ש $y-x\in\mathbb{Q}$.

פתרון:

יהא $y\in\mathbb{R}$. נחלק:

- אם $y\in S$ אז נבחר $y=x$ ואכן $y-x=x-x=0\in\mathbb{Q}$.
- אחרת, $y\notin S$. נב"ש שלא קיים $x\in S$ כך ש $y-x\in\mathbb{Q}$ אזי לכל $x\in S$ מתקיים ש $y-x\notin\mathbb{Q}$. כיוון ש $y\notin S$ אז $S\cup\{y\}$ מכיל את S ושונה ממנה. נראה ש $S\cup\{y\}$ מגניבה ונקבל סתירה לסעיף א. אכן, לכל x_1,x_2שונים ב $S\cup\{y\}$ מתקיים:
  - אם $x_1,x_2\in S$ אזי $x_1-x_2\notin\mathbb{Q}$ כי S מגניבה.
  - אם $x_1\in S$ ו $x_2\in\{y\}$ אז $x_2=y$ ונקבל פי ההנחה בשלילה כי $x_2-x_1=y-x_1\notin\mathbb{Q}$. המקרה ש $x_2\in S$ ו $x_1\in\{y\}$ דומה.

ii. הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל $f:S\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$.

פתרון:

נגדיר $f:S\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,q)=x+q$.

- טענה f על. הוכחה: יהא $y\in\mathbb{R}$ אז לפי תת סעיף קודם קיים $x\in S$ כך ש $y-x\in\mathbb{Q}$ ולכן קיים $q\in\mathbb{Q}$ המקיים $y-x=q$. לכן

$$y=x+q=f(x,q)$$

וקיבלנו ש (x,q) מקור ל y כנדרש.

- טענה f חח"ע. הוכחה: נניח $f\left((x_1,q_1)\right)=f\left((x_2,q_2)\right)$ ונראה ש $x_1=x_2,q_1=q_2$. מההנחה נקבל ש

$$x_1+q_1=x_2+q_2$$

ואם נעביר אגף

$$x_1-x_2=q_2-q_1\in\mathbb{Q}$$

כאשר האדום נובע מכך ש q_1,q_2 ב $\mathbb{Q}$. מהגדרת הקבוצה S לא ייתכן ש $x_2\neq x_1$ (כי איברים שונים מ S ההפרש שלהם לא רצינואלי) ולכן $x_1=x_2$ מכאן ש

$$0=x_1-x_2=q_2-q_1$$

ולכן גם $q_1=q_2$ כנדרש.

iii. הוכיחו/הפריכו: $\aleph = |S|$.

פתרון:

לפי תת סעיף קודם, מתקיים לפי הגדרה כי $|\mathbb{R}| = |S \times \mathbb{Q}|$ ולכן

$$\aleph = |S \times \mathbb{Q}| = |S| \cdot \aleph_0$$

כיוון ש $S \neq \emptyset$ (אחרת היא לא מקסימאלית כי $\{1\}$ קבוצה מגניבה) נקבל ש

$$\aleph = |S| \cdot \aleph_0 = \max\{|S|, \aleph_0\} = |S|$$

כאשר האדום נכון מכיוון שאחרת $\aleph = \max\{|S|, \aleph_0\} = \aleph_0$ ונקבל סתירה.