

שיעורי בית 5

1. נתון $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1, e_2 . הוכיחו:

$$\phi(e_1) = e_2 \quad (\text{א}) \quad [\text{רמז: חשב } \phi(e_1 e_1)]$$

פתרון: מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1) \phi(e_1)$$

כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1) \phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} \quad (\text{ב}) \quad \text{לכל } g \in G_1.$$

פתרון: נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(g g^{-1}) = \phi(g) \phi(g^{-1})$$

ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.

(ג) נגדיר את הגרעין של ϕ להיות $\ker(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = e_2\}$. הוכיחו כי הגרעין הוא תת-חבורה של G_1

פתרון: בסעיף קודם ראינו כי $e_1 \in \ker(\phi)$. נראה סגירות. $g, h \in \ker(\phi)$ אזי

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(g) \phi(h)^{-1} = e_2 e_2^{-1} = e_2$$

ולכן $gh^{-1} \in \ker(\phi)$

(ד) נגדיר את התמונה של ϕ להיות $Im(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G_1\}$. הוכיחו כי התמונה היא תת-חבורה של G_2 .

פתרון: $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$. נראה סגירות. יהיו $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$ כאשר $g, h \in G_1$ אזי

$$\phi(g) \phi(h)^{-1} = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

כי $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההומומורפיזם $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצאו הומומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית \mathbb{Z}_3 לחבורת התמורות S_3 **פתרון**: כיוון ש $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומומורפיזם ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $1 \mapsto \sigma$ אזי צריכה לקיים $\sigma^3 = id$. לכן הומומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1, 2, 3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1)\phi(1) = (1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל \mathbb{Z}_3 **פתרון**: הוכחה: יהא הומו ϕ אזי עבור $\sigma_1 = (1, 2), \sigma_2 = (2, 3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $0 = 2a$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1, 2, 3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1, 2, 3)$ ו $(1, 2)$ יוצרים של S_3 והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב S_3 ישלח ל-0 ולכן זהו ההומו הטריאלי.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \rightarrow G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות. **פתרון**: הוכחה:

i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g, h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה $\phi_1 \circ \phi_2$ הומו' הפיך ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי: יהי $\phi \in \text{Aut}(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומ' הוכחה

$$(\phi^{-1})(gh) = (\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕ משני הצדדים)

$$gh = \phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)] = \phi [(\phi^{-1})(g)] \phi [(\phi^{-1})(h)] = gh$$

(ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר: $\forall g \in G$
 $I_x(g) = xgx^{-1}$

הוכיחו כי Φ הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in \text{Aut}(G)$) ומצאו $\ker(\Phi)$ הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\Phi) = \{x \in G : I_x = id\} = \{x \in G : \forall g \ xgx^{-1} = g\} = \{x \in G : \forall g \ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז ($Center$) של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|}$

(לדוגמה: $\phi(3) = 1$, $\phi(-3) = -1$). הוכח ש ϕ הומומורפיזם ומצא את הגרעין

פתרון: הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in G : \text{sign}(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

(ב) : $\phi : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$: המוגדרת על ידי $\phi(a + ib) = a^2 + b^2$ (לדוגמה: $\phi(1 + 2i) = 5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין. איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

פתרון : נשים לב ש $\phi(z) = |z|^2$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. נמשיך להוכיח:

i. יהיו $z_1, z_2 \in G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ואכן

$$\phi(z_1 z_2) = |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{z \in G : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומומורפיזם $\phi : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ

פתרון : נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{\sigma \in G : \text{sign}(\sigma) = 1\} = A_n$$

5. תהא G חבורה, H תת חבורה. קוסט שמאלי של H הוא קבוצה מהצורה $gH = \{gh \mid h \in H\}$ עבור $g \in G$ (כלשהוא) באופן דומה, קוסט ימני של H הוא קבוצה מהצורה $Hg = \{hg \mid h \in H\}$.

(א) הוכיחו כי

$$[g_1 H = g_2 H] \iff [g_2^{-1} g_1 \in H] \iff [\exists h \in H : g_1 = g_2 h]$$

לכל $g_1, g_2 \in G$.

פתרון : נתחיל ב $[\exists h \in H : g_1 = g_2h]$ $\iff [g_2^{-1}g_1 \in H]$

בכיוון (\Leftarrow) נתון שקיים $h \in H$ כך ש $g_1 = g_2h$. נכפיל ב g_2^{-1} משמאל ונקבל $g_2^{-1}g_1 = h \in H$. בכיוון (\Rightarrow) נתון $g_2^{-1}g_1 \in H$ ולכן קיים $h \in H$ כך ש $g_2^{-1}g_1 = h$. נכפיל ב g_2 משמאל ונקבל $g_1 = g_2h$ כנדרש.

נוכיח כי $[g_1H = g_2H] \iff [\exists h \in H : g_1 = g_2h]$

בכיוון (\Leftarrow) נתון שקיים $h \in H$ כך ש $g_1 = g_2h$. נרצה להוכיח כי $g_1H = g_2H$, נעשה זאת בהכלה דו כיוונית: (\subseteq) יהא $g_1h' \in g_1H$ אזי $g_1h' = g_2hh'$ כיוון ש H חבורה ויש סגירות גם $hh' \in H$ ולכן $g_1h' = g_2hh' \in g_2H$. (\supseteq) יהא $g_2h' \in g_2H$ אזי כיוון ש $g_2 = g_1h^{-1}$ נקבל כי $g_2h' = g_1h^{-1}h'$ כיוון ש H חבורה נקבל כי $h^{-1} \in H$ וגם $h^{-1}h' \in H$ ולכן $g_2h' = g_1h^{-1}h' \in g_1H$. בכיוון (\Rightarrow) נתון כי $g_1H = g_2H$ כיוון ש $e \in H$ נקבל כי $g_1 \in g_1H$ מנתון נקבל כי $g_1 \in g_2H$ כלומר קיים $h \in H$ כך ש $g_1 = g_2h$ כנדרש.

(ב) נגדיר יחס \equiv על G כך: לכל $g_1, g_2 \in G$

$$[g_1 \equiv g_2] \iff [g_1H = g_2H]$$

הוכיחו כי זהו יחס שקילות (כלומר, הוכיחו כי יחס סדר רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

פתרון : רפלקסיביות: לכל $g \in G$ מתקיים כי $g_1 = g_1 \cdot e$ כיוון ש $e \in H$ נקבל כי $gH = gH$ לכן $g \equiv g$.

סימטריות: נניח כי $g, g' \in G$ מקיימים $g \equiv g'$ (צ"ל $g \equiv g'$) אזי $gH = g'H$ ולכן $g'H = gH$ ולכן $g' \equiv g$.

טרנזיטיביות: יהיו $g_1, g_2, g_3 \in G$ כך ש $g_1 \equiv g_2$ וגם $g_2 \equiv g_3$ (צ"ל $g_1 \equiv g_3$) אזי $g_1H = g_2H$ וגם $g_2H = g_3H$ ולכן $g_1H = g_3H$ ולכן $g_1 \equiv g_3$.

(ג) עבור $g \in G$ נגדיר את מחלקת השקילות של g להיות $[g]_{\equiv} = \{g' \in G \mid g \equiv g'\}$. הוכיחו כי $[g]_{\equiv} = gH$.

פתרון : בהכלה דו כיוונית. (\subseteq) יהא $g' \in [g]_{\equiv}$ אזי $gH = g'H$ ולכן $g'H = gH$ לפי סעיף א נקבל כי $g' = gh$ עבור $h \in H$ כלשהוא ולכן $g' = gh \in gH$.

מצד שני (\supseteq) יהא $g' \in gH$ אזי קיים $h \in H$ כך ש $g' = gh$ ולכן לפי סעיף א $gH = g'H$ ולכן $g \equiv g'$ ולכן $g' \in [g]_{\equiv}$.

(ד) את אוסף מחלקות השקילות מסמנים כ $\{gH \mid g \in G\}$. הוכיחו כי אם G סופית אזי $|\{G/H\}| = \frac{|G|}{|H|}$. (הדרכה: הוכיחו כי כל מחלקות השקילות מאותו גודל).

פתרון : נראה כי כל מחלקות השקילות מגדול $|H|$. אכן יהא $g \in G$ ותהא gH מחלקת שקילות. נגדיר פונקציה $f : H \rightarrow gH$ כ"ע

$$\forall h \in H : f(h) = gh$$

נראה כי f חח"ע+על (וזה יראה כי $|gH| = |H|$).

חח"ע: יהיו $h_1, h_2 \in H$ כך ש $f(h_1) = f(h_2)$ אזי $gh_1 = gh_2$ נכפיל ב g^{-1} משמאל ונקבל $h_1 = h_2$.

על: יהא $g' \in gH$ אזי קיים $h \in H$ כך ש $g' = gh$ ולכן h הוא המקור של g' שכן $f(h) = gh = g'$.

(ה) תהא G חבורה סופית. H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H . הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

פתרון : נתוןמשפט לגרנז

$$|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|} = |G/H| \cdot |H/K|$$

.6

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכיחו כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \mid g \in G\}$ ו $K_2 = \{Hg \mid g \in G\}$ בעלות עוצמה שווה. (הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \rightarrow K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

פתרון : טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_2H) = Hg_2^{-1} = Hg_1^{-1} = \phi(g_1H)$.
 אם $g_1H = g_2H$ אז $g_2^{-1}g_1 \in H$ כיוון ש H תת חבורה אז גם ההופכי

$$Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1} \text{ ואז } (g_2^{-1}g_1)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$$

חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$

מהנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן גם ההופכי $g_1H = g_2H$ ואז $g_2^{-1}g_1 \in H$

על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

פתרון : יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in G$ אזי $gH = H = Hg$

אחרת $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה

$$gH = G \setminus H = Hg \text{ כי } H \text{ נקבל כי}$$