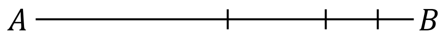
נכתב על ידי יהונתן רגב

חשבון אינפיניטסימלי 1

חסמים

הפרדוקס של $Zeno$



תנועה בלתי אפשרית.

ניתן לנתח תנועה מנקודה A לנקודה B כתנועה בשלבים, כאשר בכל שלב יש לעבור מחצית מהדרך שנותרה. הזמן שלוקח לעבור כל שלב חיובי, ויש אינסוף שלבים.

פתרון לפרדוקס נראה בהמשך הקורס.

הערה

המספרים שנזכיר בקורס הם המספרים הממשיים, הכוללים את המספרים הרציונאליים ואת המספרים האי רציונאליים $(\sqrt{2}, \pi, e \dots)$.

הערה

אותיות לועזיות קטנות $a, b, c \dots$ יציינו מספרים ממשיים, אלא אם נאמר אחרת.

אותיות לועזיות גדולות $A, B, C \dots$ יציינו קבוצות של מספרים ממשיים, אלא אם נאמר אחרת.

הערה

$\mathbb{R}$ הוא שדה סדור. הוא שדה שיש עליו יחס סדר " $<$ ", כך שלכל שני מספרים, אחד גדול מהשני ("סדר מלא"), ומתקיימות התכונות הבאות:

1. אם $a < b$, אז לכל c: $a + c < b + c$.
2. אם $a < b$, אז לכל $0 < c$: $ac < bc$.

תרגיל

מהתכונות הנ"ל של המספרים הממשיים, ניתן להסיק את כל התכונות המוכרות.

למשל, חיבור אי שוויונים:

אם $a \le b \wedge c \le d$ אז $a + c \le b + d$.

הגדרה

יהיו $a < b \in \mathbb{R}$.

נכתב על ידי יהונתן רגב

נגדיר **קטעים**:

- **קטע סגור:**

$$[a,b] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

- **קטע פתוח:**

$$(a,b) \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- **קטע "חצי פתוח":**

$$[a,b) \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

$$(a,b] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

המקסימום של A הוא האיבר הגדול ביותר ב - A, אם קיים, ומסומן: $max(A)$.

דוגמה

קבוצה	מקסימום
$[a,b]$	b
$(a,b]$	b
(a,b)	לא קיים
$[a,b)$	לא קיים

סימון

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

$A \le b$ אם לכל $a \in A$: $a \le b$.

דוגמה

$$\left\{1-\frac{1}{2^n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \quad \le \quad 1$$

$$\not\le \quad 1-\frac{1}{10^2}$$

הגדרה

נכתב על ידי יהונתן רגב

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

b **חסם מלעיל** לקבוצה A אם $A \leq b$.

דוגמה

1. כל $1 \leq k \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל לקבוצה $\{1 - 1/n | n \in \mathbb{N}\}$. לקבוצה הנ״ל אין מקסימום.
2. לקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ אין חסם מלעיל.

הערה

מקסימום הוא חסם מלעיל.

למשל:

$$max([0,1]) \quad = \quad 1$$

ואכן:

$$[0,1] \quad \leq \quad 1$$

הגדרה

קבוצה היא **חסומה מלעיל** אם קיים לה חסם מלעיל.

כלומר, $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אם קיים $b \in \mathbb{R}$ כך ש: $A \leq b$.

דוגמה

קבוצה	קבוצת חסמי המלעיל
$[0,1]$	$[1,\infty)]$
$\mathbb{R}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\mathbb{R}$

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

חסם עליון (סופרמום) הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של A, אם קיים, ויסומן: $sup(A)$.

כלומר, $b \in \mathbb{R}$ חסם עליון של A אם:

1. $A \leq b$.
2. לכל $A \leq c \in \mathbb{R}$: $b \leq c$.

נכתב על ידי יהונתן רגב

דוגמה

קבוצה	חסם עליון
$[a,b]$	b
$[a,b)$	b
$\left\{1-\frac{1}{n}\middle\|n\in\mathbb{N}\right\}$	1
$\mathbb{N}$	לא קיים
$\emptyset$	לא קיים

אקסיומת החסם העליון

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים, קיים חסם עליון.

כלומר, לכל $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$, אם קיים $A\leq b\in\mathbb{R}$, אז $sup(A)$ קיים.

למה

אם לקבוצה יש חסם עליון, אז הוא יחיד.

הוכחה

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$.

יהיו $b,c\in\mathbb{R}$ חסמים עליונים של A.

בפרט, b חסם מלעיל, לכן (c חסם עליון):

$$c \leq b$$

בפרט, c חסם מלעיל, לכן (b חסם עליון):

$$b \leq c$$

לכן:

$$b = c$$

$\blacksquare$

למה

מקסימום הוא סופרמום.

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

נסמן:

$$a \coloneqq max(A)$$

עפ"י הגדרת המקסימום:

$$A \leq a$$

יהי $A \leq c \in \mathbb{R}$.

עפ"י הגדרת המקסימום:

$$a \in A$$

לכן:

$$a \leq c$$

לכן:

$$a = sup(A)$$

$$\blacksquare$$

למה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

אם $A \in sup(A)$ קיים, אז $sup(A) = max(A)$.

למה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

$a = sup(A)$ אם ורק אם $a \leq A$ ולכל $b < a$, קיים $c \in A$ כך ש: $b < c$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח $a = sup(A)$.

לכן:

$$A \leq a$$

יהי $b < a$.

נניח בשלילה כי:

$$A \leq b$$

$a = sup(A)$, לכן:

$$a \leq b$$

לכן:

$$a < a$$

סתירה.

לכן:

$$A \nleq b$$

לכן, קיים $A \ni c$ כך ש:

$$b < c$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

תרגיל!

$$\blacksquare$$

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

המינימום של A הוא האיבר הקטן ביותר ב - A, אם קיים, ומסומן: $min(A)$.

סימון

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

$b \leq A$ אם לכל $a \in A$: $b \leq a$.

הוכחה

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

b **חסם מלרע** לקבוצה A אם $b \leq A$.

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

חסם ,תחתון (אינפימום) הוא החסם מלרע הגדול ביותר של A, אם קיים, ויסומן : $inf(A)$.

למה

אם לקבוצה יש חסם תחתון, אז הוא יחיד.

למה

מינימום הוא חסם תחתון

למה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

$a = inf(A)$ אם ורק אם $a \leq A$ ולכל $a < b$, קיים $c \in A$ כך ש : $c < b$.

למה

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים, קיים חסם תחתון.

■