לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשפ,מועד א'-פתרון

מרצים: מר אחיה בר-און, מר בארי גרינפלד, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: ניקול בלשוב, אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, נועה כהן, גלעד פורת-קורן, זהבה צבי, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. תהא $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ונגדיר $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י הכלל $T(A) = M \cdot A$. נגדיר בנוסף

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(א) חשבו את $\text{trace}([T]_S^B)$

פתרון: נחשב את המטריצה המייצגת

$$\begin{aligned}
[T]_S^B &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_S & \left[T\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right]_S & \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_S & \left[T\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right]_S \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right]_S & \left[\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 3 & -48 \end{pmatrix}\right]_S & \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_S & \left[\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -2 & 24 \end{pmatrix}\right]_S \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 12 & 5 & 8 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -48 & 1 & 24 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\text{trace}([T]_S^B) = 3 + 12 + 24 = 39$$

(ב) מצאו מטריצה A כך ש

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},A\right\}$$

הוא בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ומתקיים כי $\det[T]_C^B=5$.

פתרון: נבחר $A=\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ עבור $\alpha\neq 0$ (נמצא את α אח"כ). קל לראות ש C אכן בסיס (כי C מתקבל מהבסיס הסטנדרטי S ע"י כפל של מטריצה אחת בסקלר שונה מאפס). נחשב את המטריצה המייצגת

$$[T]_S^B=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ \left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_S&\left[T\begin{pmatrix}0&9\\3&-3\end{pmatrix}\right]_S&\left[T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_S&\left[T\begin{pmatrix}0&-4\\-2&4\end{pmatrix}\right]_S\\ |&|&|&|\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ \left[\begin{pmatrix}3&0\\-5&0\end{pmatrix}\right]_C&\left[\begin{pmatrix}15&12\\3&-48\end{pmatrix}\right]_C&\left[\begin{pmatrix}0&5\\0&1\end{pmatrix}\right]_C&\left[\begin{pmatrix}-10&-8\\-2&24\end{pmatrix}\right]_C\\ |&|&|&|\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&15&0&-10\\0&12&5&8\\-5&3&0&-2\\0&\frac{-48}{\alpha}&\frac{1}{\alpha}&\frac{24}{\alpha}\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det([T]_C^B)=\frac{1}{\alpha}\det([T]_S^B)$$

כי הוצאנו $\frac{1}{\alpha}$מהשורה האחרונה. כעת נרצה ש $\frac{1}{\alpha}\det([T]_S^B)=\det([T]_C^B)=5$ ולכן נבחר $\alpha=\frac{\det([T]_S^B)}{5}$ ונותר לנו לחשב $\det([T]_S^B)$. נבצעאת הפעולה R_2-5R_4 (שלא משנה דטרמיננטה) ואז נפתח לפי עמודה 3

$$\left|\begin{pmatrix}3&15&0&-10\\0&12&5&8\\-5&3&0&-2\\0&-48&1&24\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3&15&0&-10\\0&252&0&-112\\-5&3&0&-2\\0&-48&1&24\end{pmatrix}\right|$$
$$=(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\left|\begin{pmatrix}3&15&-10\\0&252&-112\\-5&3&-2\end{pmatrix}\right|$$
$$=-\left|\begin{pmatrix}3&15&-10\\0&252&-112\\-5&3&-2\end{pmatrix}\right|$$

נבצע $R_3+\frac{5}{3}R_1$ ונפתח לפי שורה 1

$$-\left|\begin{pmatrix}3&15&-10\\0&252&-112\\-5&3&-2\end{pmatrix}\right|=-\left|\begin{pmatrix}3&15&-10\\0&252&-112\\0&28&-\frac{56}{3}\end{pmatrix}\right|$$
$$=-3\cdot\left|\begin{pmatrix}252&-112\\28&-\frac{56}{3}\end{pmatrix}\right|$$
$$=-3\left(-84\cdot 46+28\cdot 112\right)$$
$$=4704$$

ולכן עבור

$$\alpha=\frac{4704}{5}$$

ו $A=\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ נקבל את הדרוש.

2. תהא $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&-1\\-2&4&-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. נסמן את מרחב העמודות של A ב $C(A)$ ונסמן את מרחב השורות של A ב $R(A)$ ונחשוב על שניהם כתתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

(א) מצאו בסיס ל $C(A)$

(ב) מצאו בסיס ל $R(A)$

(ג) מצאו בסיס לסכום $C(A)+R(A)$

(ד) מצאו בסיס לחיתוך $C(A)\cap R(A)$

פתרון: נדרג את A

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&-1\\-2&4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן בצורה מדורגת יש איברים מובילים בעמודה 1 ו 2 ולכן בסיס אפשרי למרחב העמודות הוא עמודה 1 ו 2 של A כלומר

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $C(A)$ בנוסף, שורות שונות מאפס במדורגת מהווים בסיס למרחב השורות ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $R(A)$. כעת

$$C(A)+R(A)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\right\}+\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

וקיבלנו קבוצה פורשת של $C(A)+R(A)$ שנצמצם אותה לבסיס. נשים את הוקטורים כעמודות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix}2&-1&2&0\\1&1&-1&3\\-2&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&2&0\\0&\frac{3}{2}&-2&3\\0&3&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&2&0\\0&\frac{3}{2}&-2&3\\0&0&6&-8\end{pmatrix}$$

ולכן קיבלנו צורה מדורגת שבשלושת העמודות הראשונות יש איברים מובילים ולכן בסיס אפשרי ל $C(A)+R(A)$ הם שלושת העמודות הראשונות במטריצה המקורית, כלומר

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $C(A)+R(A)$.

נעבור לחיתוך - נעביר קודם את $R(A)$ ו $C(A)$ להצגה ע"י משוואות (ע"י השוואת הוקטורים בבסיס של כל אחד לוקטור כללי ובדיקת מתי לעולם לא תהיה שורת סתירה). עבור $C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&x\\1&1&y\\-2&4&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&x\\0&\frac{3}{2}&y-\frac{1}{2}x\\0&3&z+x\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&x\\0&\frac{3}{2}&y-\frac{1}{2}x\\0&0&z+-2y+2x\end{array}\right)$$

ולכן

$$C(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid z+-2y+2x=0\right\}$$

כעת, עבור $R(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&0&x\\-1&3&y\\0&-2&z\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}2&0&x\\-1&3&y+\frac{1}{2}x\\0&-2&z\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}2&0&x\\-1&3&y+\frac{1}{2}x\\0&0&z+\frac{2}{3}y+\frac{2}{6}x\end{array}\right)$$

ולכן

$$R(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid z+\frac{2}{3}y+\frac{2}{6}x=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid 3z+2y+x=0\right\}$$

מכאן ש

$$C(A)\cap R(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid \begin{array}{c}z+-2y+2x=0\\3z+2y+x=0\end{array}\right\}$$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&2&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&3&\frac{5}{2}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&1&\frac{5}{6}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&\frac{16}{6}\\0&1&\frac{5}{6}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{3}\\0&1&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

ולכן

$$C(A)\cap R(A)=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}t\\-\frac{5}{6}\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-8\\-5\\6\end{pmatrix}\right\}$$

3. תהא

$$A=\begin{pmatrix}0&a-2&0\\-3&a+10&2a^2-2a+7\\0&0&2a^2-2a-4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

התלויה בפרמטר a הממשי ותהא

$$B=\begin{pmatrix}-6&3&1\\19&-8&-4\\2&0&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מטריצה הפיכה ויהא

$$b=\begin{pmatrix}a\\3a+2\\2a-4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}$$

וקטור עמודה.

(א) מצאו את ההופכית של B(כלומר מצאו את B^{-1})

פתרון: נשתמש באלגוריתם להפיכת מטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & -8 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & \frac{-5}{6} & \frac{19}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 19 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -5 & 19 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 0 & -15 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 33 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -48 & -18 & 24 \\ 0 & 3 & 0 & 33 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array}\right)$$

ולכן

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 11 & 4 & -5 \\ 16 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו לאילו ערכי a למערכת $Ax = b$ אין פתרון יחיד (כלומר יש אינסוף פתרונות או שאין פתרון כלל).

פתרון: נדרג את המטריצה $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-2 & 0 & a \\ -3 & a+10 & 2a^2-2a+7 & 3a+2 \\ 0 & 0 & 2a^2-2a-4 & 2a-4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & a+10 & 2a^2-2a+7 & 3a+2 \\ 0 & a-2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2\left(a-2\right)\left(a+1\right) & 2a-4 \end{array}\right)$$

ולכן עבור $a \neq 2, -1$ נקבל צורה מדורגת ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ובמקרה זה יהיה פתרון יחיד.
עבור $a = 2$ נקבל שורת סתירה (בשורה השניה) ולכן לא יהיה פתרון. עבור $a = -1$ נקבל שורת סתירה בשורה השלישית וגם במקרה זה לא יהיה פתרון.
לכן התשובה לסעיף זה היא $\{2, -1\}$

(ג) מצאו לאילו ערכי a למערכת $AB^tx = b$ אין פתרון.

פתרון: נתחיל בכך שנשים לב שלכל x אם $AB^tx = b$ אז $A \cdot (B^tx) = b$ (כלומר אם v הוא פתרון למערכת $AB^tx = b$ אז B^tv הוא פתרון למערכת $Ax = b$).

בנוסף, מכיוון ש B הפיכה גם B^tהפיכה. ואז גם נקבל שלכל x אם $Ax = b$ אז $AB^t \cdot \left(\left(B^t\right)^{-1} x\right) = b$ (כלומר אם v הוא פתרון למערכת $Ax = b$ אז $\left(B^t\right)^{-1} v$ הוא פתרון למערכת $AB^tx = b$).

מסקנה: ערכי a עבורם למערכת $AB^tx = b$ אין פתרון הם שווים לערכי a עבורם למערכת $Ax = b$ אין פתרון שזה מצאנו בסעיף הקודם שזוהי קבוצת הערכים $\{2, -1\}$.

(ד) מצאו לאילו ערכי a למערכת $AB^tx = b$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון: כמו בסעיף הקודם נקבל שערכי a עבורם למערכת $AB^tx = b$ יש אינסוף פתרונות הם שווים לערכי a עבורם למערכת $Ax = b$ יש אינסוף פתרונות שמצאנו בסעיף (ב) שזוהי קבוצה ריקה $\{\}$.

(ה) בחרו ערך אחד של הפרמטר a עבורו למערכת $AB^tx=b$ יש פתרון יחיד.

פתרון: כמו שהסברנו מקודם זה שקול לבחור a עבורו למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד (שזה קורה אמ"מ למערכת $AB^tx=b$ יש פתרון יחיד).

למשל $a=0$

(ו) עבור הערך שבחרתם בסעיף הקודם - מצאו את הפתרון של המערכת $AB^tx=b$

פתרון: נתחיל עם המערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד נציב $a=0$ במערכת המדורגת מסעיף (ב) ונמשיך לדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן $v=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא הפתרון היחיד למערכת $Av=b$ ולכן $\left(B^t\right)^{-1}v$ הוא הפתרון היחיד למערכת $AB^tx=b$, נחשב

$$\left(B^t\right)^{-1}v=\left(B^{-1}\right)^tv=\begin{pmatrix} 8 & 11 & 16 \\ 3 & 4 & 6 \\ -4 & -5 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{88}{3} \\ 11 \\ -\frac{47}{3} \end{pmatrix}$$

4. יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים עד דרגה 2. תהא $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, המוגדרת ע"י משפט ההגדרה, להיות העתקה היחידה המקיימת כי

$$T(4+3x+10x^2)=0+0x+0x^2$$
$$T(x)=12-3x+10x^2$$
$$T(x^2)=8-3x+5x^2$$

מצאו בסיס B של $\mathbb{R}_2[x]$ עבורו במטריצה המייצגת $[T]_B^B$ השורה השלישית היא שורת אפסים <u>וגם</u> העמודה הראשונה היא עמודת אפסים.

פתרון: נתחיל במציאת בסיס ל $\mathrm{Im}T$. מתקיים כי

$$\mathrm{Im}T=\text{span}\left\{0+0x+0x^2,12-3x+10x^2,8-3x+5x^2\right\}$$

(כי $\mathrm{Im}T$ נפרשת ע"י תמונה של בסיס). כיוון ש $12-3x+10x^2,8-3x+5x^2$ (שני פולינומים ת"ל אמ"מ אחד כפולה של השני, מה שלא קורה כאן) נקבל ש $\left\{12-3x+10x^2,8-3x+5x^2\right\}$ בסיס ל $\mathrm{Im}T$ (פולינומים האפס לא משפיע על ה span. ולכן $\dim\mathrm{Im}T=2$ ולפי משפט המימדים $\dim\ker T=\dim\mathbb{R}_2[x]-\dim\mathrm{Im}T=3-2=1$ ולכן $\left\{4+3x+10x^2\right\}$ בסיס ל $\ker T$ (כי נתון ש $4+3x+10x^2$ נשלח לאפס). כעת נבדוק האם הבסיס של התמונה והבסיס של הגרעין בת"ל.

נבדוק זאת בעזרת וקטורי הקורדינאטות לפי הבסיס הסטנדרטי $\left\{1,x,x^2\right\}$ של V (נשים בעמודה ונדרג)

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 3 & -3 & -3 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת עם משתנה חופשי ולכן הם ת"ל ולכן תת המרחב $\text{span}\left\{4+3x+10x^2, 12-3x+10x^2, 8-3x+5x^2\right\}$ הוא מימד 2. מכיון ש

$$\text{Im}T = \text{span}\left\{12-3x+10x^2, 8-3x+5x^2\right\} \subseteq \text{span}\left\{4+3x+10x^2, 12-3x+10x^2, 8-3x+5x^2\right\}$$

מאותו מימד הם שווים ובפרט

$$\ker T = \text{span}\left\{4+3x+10x^2\right\} \subseteq \text{Im}T$$

וגם

$$\text{Im}T = \text{span}\left\{4+3x+10x^2, 12-3x+10x^2\right\}$$

(כיוון ש $4+3x+10x^2, 12-3x+10x^2$ בת"ל). נמצא $p(x)$ כך ש $4+3x+10x^2, 12-3x+10x^2, p(x)$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$. נסמן בסיס זה ב B ונקבל כי

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהפולינום הראשון ב B שייך ל $\ker T$ ושני הפולינומים הראשונים ב B הם בסיס ל $\text{Im}T$ (ולכן $T(p(x))$ הוא צ"ל שלהם). נראה כי $p(x) = 10x^2$ יקיים את המבוקש. נדרג את המטריצה שעמודותיה הם וקטורי הקורדינטאות של $4+3x+10x^2, 12-3x+10x^2, p(x)$ לפי הבסיס הסטנדרטי $\left\{1,x,x^2\right\}$ ונראה כי עמודות אלו בת"ל

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו צורה מדורגת ללא משתנים חופשיים כנדרש.

חלק ב

5. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ונניח כי $m \geq 2$ טבעי מקיים כי $A^m = 0$ וגם $A^{m-1} \neq 0$

(א) הוכיחו/הפריכו: קיים $v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ בת"ל

פתרון: הוכחה: כיוון ש $A^{m-1} \neq 0$ קיים v כך ש $A^{m-1}v \neq 0$. נראה $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ בת"ל. יהא

$$\alpha_1 v + \alpha_2 Av + \cdots + \alpha_m A^{m-1}v = 0$$

צירוף לינארי שלהם שמתאפס ונראה כי כל המקדמים שווים לאפס (כלומר $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$). כיוון ש $A^m = 0$ נקבל שלכל k טבעי מתקיים כי $A^{m+k} = A^m T^k = 0A^k = 0$ ולכן לכל k טבעי מתקיים כי $A^{m+k}v = 0$. כעת נכפיל את שני האגפים של השיוויון ההתחלתי ב A^{m-1} ונקבל

$$A^{m-1}\left(\alpha_1 v + \alpha_2 Av + \cdots + \alpha_m A^{m-1}v\right) = A^{m-1}0 = 0$$

ולכן

$$\alpha_1 A^{m-1}v + \alpha_2 A^m v + \cdots + \alpha_m A^{m+(m-2)}v = 0$$

ולכן $\alpha_1 A^{m-1}v = 0$ (כל שאר המחוברים מתאפסים). בצירוף העובדה ש $A^{m-1}v \neq 0$ נסיק ש $\alpha_1 = 0$ ונקבל את השיוויון ההתחלתי בצורה יותר פשוטה - $\alpha_2 Av + \cdots + \alpha_m A^{m-1}v = 0$. נפעיל על שיוויון זה A^{m-2} ונקבל כי $\alpha_2 A^{m-1}v = 0$ ולכן $\alpha_2 = 0$. באופן דומה, נקבל כי $\alpha_3 = 0$ עד $\alpha_m = 0$ וסיימנו.

בצורה פורמלית יותר, נוכל להשתמש באינדוקציה שלמה לטעון ש: לכל i טבעי אם $1 \leq i \leq m$ אז $\alpha_i = 0$

הוכחה:

- בסיס $i = 1$: עבור $i = 1$ מתקיים כי $1 \leq i \leq m$ וצריך להוכיח כי $\alpha_1 = 0$ וזה כבר עשינו.
- צעד: נניח נכונות עד $i > 1$ (לא כולל) מסוים ונוכיח נכונות עבור i. צ"ל אם $1 \leq i \leq m$ אז $\alpha_i = 0$. נניח כי $1 \leq i \leq m$ וצ"ל $\alpha_i = 0$. מהנחת האינדוקציה נקבל כי $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{i-1} = 0$ ולכן נשארנו עם השיווון

$$\alpha_i A^{i-1}v + \alpha_{i+1}A^i v + \cdots + \alpha_m A^{m-1}v = 0$$

שעליו נפעיל את A^{m-i} (במידה ו $i = m$ נשארנו עם השיוון $\alpha_m A^{m-1}v = 0$ ונסיק כי $\alpha_m = 0$) לקבל כמו מקודם

$$A^{m-i}\left(\alpha_i A^{i-1}v + \alpha_{i+1}A^i v + \cdots + \alpha_m A^{m-1}v\right) = A^{m-i}0 = 0$$

ומכיוון ש

$$A^{m-i}\left(\alpha_i A^{i-1}v + \alpha_{i+1}A^i v + \cdots + \alpha_m A^{m-1}v\right) = \alpha_i A^{m-1}v + \alpha_{i+1}A^m v + \cdots + \alpha_m A^{m+(m-i-1)}v = \alpha_i A^{m-1}v$$

נקבל ש $\alpha_i A^{m-1}v = 0$ ונסיק כי $\alpha_i = 0$ (בצירוף העובדה ש $A^{m-1}v \neq 0$).

(ב) הוכיחו/הפריכו: $A^n = 0$ (שימו לב ש n הוא גודל המטריצה)

פתרון: הוכחה: לפי הסעיף הקודם קיבלנו שקיימים m וקטורים בת"ל. ולכן $m \leq n$ (שהרי ב $\mathbb{F}^n$ הקבוצה הבת"ל מקסמאלית מכילה n איברים) ולכן

$$A^n = A^m A^{n-m} = 0A^{n-m} = 0$$

כנדרש (במקרה ש $m = n$ אז מהנתון כבר נסיק ש $A^n = A^m = 0$).

(ג) הוכיחו/הפריכו: $\text{rank}A \leq \frac{n}{2}$ (שימו לב ש n הוא גודל המטריצה)

פתרון: הפרכה: למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

מקיימת כי $A^3 = 0$ וגם $A^2 \neq 0$ (ולכן $m = 3$) אבל $\text{rank}A = 2 > \frac{3}{2} = \frac{n}{2}$.

6. יהא V מ"ו ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ בת"ל נסמן Q את קבוצת כל הוקטורים $v \in V$ המקיימים כי $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל.

(א) הוכיחו/הפריכו: Q הוא תת מרחב של V.

פתרון: הפרכה: למשל וקטור האפס לא שייך ל Q. שהרי $v_1 + 0, \ldots, v_n + 0$ זה הוקטורים $v_1, \ldots, v_n$ שבת"ל לפי הנתון.

(ב) הוכיחו /הפריכו: מתקיים כי $Q \subseteq \text{span}\left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$

פתרון: הוכחה: יהא $v \in Q$ אזי $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל ולכן קיים צי"ל לא טריוואלי

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(v_i + v\right) = 0$$

(כלומר קיים j כך ש $\alpha_j \neq 0$). מכיוון ש $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i + v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v$ נקבל אחרי העברת אגף כי

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) v$$

ואז נסמן $\beta = \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$ ונוכיח כי $\beta \neq 0$ ונקבל כי

$$v = \beta^{-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta^{-1} \alpha_i\right) v_i \in \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

כנדרש. נוכיח שאכן $\beta \neq 0$. נניח בשלילה כי $\beta = 0$ ונקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) v = \beta v = 0$$

ומכיוון ש $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל נקבל כי $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ בסתירה לכך ש $\alpha_j \neq 0$.

(ג) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $Q = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -1\right\}$

פתרון: הוכחה: הכלה דו-כיוונית ישירה:

$(\subseteq)$ יהא $v \in Q$ אזי $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל ולכן קיים צ"ל לא טריוואלי

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i + v) = 0$$

וכמו מקודם נקבל כי $v = \beta^{-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta^{-1} \alpha_i\right) v_i$ כאשר $\beta = \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \neq 0$. בנוסף

$$\beta^{-1} \alpha_1 + \beta^{-1} \alpha_2 + \cdots + \beta^{-1} \alpha_n = \beta^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = -\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} = -1$$

ולכן $v \in \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -1\right\}$ (שהרי הסכום של המקדמים $v = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta^{-1} \alpha_i\right) v_i$ שווה למינוס אחד).

$(\supseteq)$ יהא $v \in \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -1\right\}$ אזי קיימים סקלרים כך ש $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ וגם $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -1$. צ"ל $v \in Q$. כלומר צ"ל כי $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל .

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i + v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + (-v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0$$

ולכן $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i + v) = 0$ וזהו צ"ל לא טריוואלי (שהרי אם המקדמים היו כולם אפס אז $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \neq -1$) ולכן $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל כנדרש.

פתרון נוסף:

יהא $v \in Q$ אזי, לפי סעיף קודם, קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, כך ש

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ובנוסף $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל. נגדיר $W = \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ ונקבל כי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל W וגם $v_1 + v, \ldots, v_n + v \in W$. כעת $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ ת"ל שקול לכך ש $[v_1 + v]_B, \ldots, [v_n + v]_B$ ת"ל. נגדיר מטריצה A שאלו עמודותיה. במפורש,

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1 + v]_B & \cdots & [v_n + v]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

והיא מטריצה ריבועית (היא בגודל $n \times n$). נקבל ש $[v_1+v]_B, \ldots, [v_n+v]_B$ ת"ל שקול לכך שעמודות A ת"ל שזה שקול (מכיוון ש A ריבועית) ש A אינה הפיכה שזה שקול לכך ש $\det A = 0$. נחשב את A מפורשות יותר ונחשב את הדטרמיננטה שלה. לפי הגדרה (ומכך שהעתקת הייצוג לפי בסיס B היא ה"ל) נקבל ש

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1+v]_B & \cdots & [v_n+v]_B \\ | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_B+[v]_B & \cdots & [v_n]_B+[v]_B \\ | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 1+\alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וכעת נחשב את הדטרמיננטה של A. דבר ראשון נחבר לשורה האחרונה את כל השורות שלפניה (כלומר נבצע את פעולות הדירוג $R_n+R_1, \ldots R_n+R_{n-1}$) שלא משנות את הדטרמיננטה ונקבל

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 1+\alpha_n \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\sum_{i=1}^n \alpha_i & 1+\sum_{i=1}^n \alpha_i & \cdots & 1+\sum_{i=1}^n \alpha_i \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

ונוכל להוציא גורם משותף משורה האחרונה ולהמשיך

$$= \left(1+\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \left| \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1+\alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

ואז נבצע את הפעולות $R_1-\alpha_1 R_n, \ldots, R_{n-1}-\alpha_{n-1}R_n$ (שלא משנות את הדטרמיננטה) ונמשיך לקבל

$$= \left(1+\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

ומכיוון ש $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ משולשית (תחתונה) עם 1ים על האלכסון נקבל שהדטרמיננטה שלה שווה אחד ובסה"כ נקבל ש $|A| = (1+\sum_{i=1}^n \alpha_i)$. לכן A לא הפיכה אמ"מ $(1+\sum_{i=1}^n \alpha_i) = 0$ אמ"מ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -1$ כנדרש.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").