

לינארית 1 (88112), סמטסטר קיץ תשפ, מועד א'-פתרון

מרצים: מר אחיה בר-און, מר בארי גרינפלד, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייה, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: ניקול בלשוב, אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, נועה כהן, גלעד פורת-קורן, זהבה צבי, אושרית שטוסל.

אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל 6 השאלות.
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א' 70 נקודות וחלק ב' 36 נקודות).
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. תהא $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ונגדיר $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ המוגדרת ע"י הכלל $T(A) = M \cdot A$. נגדיר בנוסף

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני בסיסים של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(א) חשבו את $\text{trace}([T]_S^B)$

פתרון: נחשב את המטריצה המייצגת

$$\begin{aligned} [T]_S^B &= \begin{pmatrix} \left[T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_S & \left[T \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right]_S & \left[T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_S & \left[T \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right]_S \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \right]_S & \left[\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 3 & -48 \end{pmatrix} \right]_S & \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_S & \left[\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -2 & 24 \end{pmatrix} \right]_S \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 12 & 5 & 8 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -48 & 1 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן

$$\text{trace}([T]_S^B) = 3 + 12 + 24 = 39$$

(ב) מצאו מטריצה A כך ש

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A \right\}$$

הוא בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ומתקיים כי $\det[T]_C^B = 5$.

פתרון: נבחר $A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ עבור $\alpha \neq 0$ (נמצא את α אח"כ). קל לראות ש C אכן בסיס (כי C מתקבל מהבסיס הסטנדרטי S ע"י כפל של מטריצה אחת בסקלר שונה מאפס). נחשב את המטריצה המייצגת

$$\begin{aligned} [T]_S^B &= \begin{pmatrix} \left[T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_S & \left[T \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \right]_S & \left[T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_S & \left[T \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right]_S \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \right]_C & \left[\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 3 & -48 \end{pmatrix} \right]_C & \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_C & \left[\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -2 & 24 \end{pmatrix} \right]_C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 12 & 5 & 8 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{-48}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \frac{24}{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן

$$\det([T]_C^B) = \frac{1}{\alpha} \det([T]_S^B)$$

כי הוצאנו $\frac{1}{\alpha}$ מהשורה האחרונה. כעת נרצה ש $\det([T]_C^B) = 5$ ולכן נבחר $\alpha = \frac{\det([T]_S^B)}{5}$ ונותר לנו לחשב $\det([T]_S^B)$. נבצע את הפעולה $R_2 - 5R_4$ (שלא משנה דטרמיננטה) ואז נפתח לפי עמודה 3

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 12 & 5 & 8 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -48 & 1 & 24 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 & -10 \\ 0 & 252 & 0 & -112 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -48 & 1 & 24 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 & 15 & -10 \\ 0 & 252 & -112 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \right| \\ &= - \left| \begin{pmatrix} 3 & 15 & -10 \\ 0 & 252 & -112 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

נבצע $R_3 + \frac{5}{3}R_1$ ונפתח לפי שורה 1

$$\begin{aligned} - \left| \begin{pmatrix} 3 & 15 & -10 \\ 0 & 252 & -112 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \right| &= - \left| \begin{pmatrix} 3 & 15 & -10 \\ 0 & 252 & -112 \\ 0 & 28 & -\frac{56}{3} \end{pmatrix} \right| \\ &= -3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 252 & -112 \\ 28 & -\frac{56}{3} \end{pmatrix} \right| \\ &= -3(-84 \cdot 46 + 28 \cdot 112) \\ &= 4704 \end{aligned}$$

ולכן עבור

$$\alpha = \frac{4704}{5}$$

1. $A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל את הדרוש.

2. תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. נסמן את מרחב העמודות של A ב $C(A)$ ונסמן את מרחב השורות של A ב $R(A)$ ונחשוב על שניהם כתתי מרחבים של \mathbb{R}^3 .

- (א) מצאו בסיס ל $C(A)$
 - (ב) מצאו בסיס ל $R(A)$
 - (ג) מצאו בסיס לסכום $C(A) + R(A)$
 - (ד) מצאו בסיס לחיתוך $C(A) \cap R(A)$
- פתרון: נדרג את A

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן בצורה מדורגת יש איברים מובילים בעמודה 1 ו 2 ולכן בסיס אפשרי למרחב העמודות הוא עמודה 1 ו 2 של A כלומר

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $C(A)$ בנוסף, שורות שונות מאפס במדורגת מהווים בסיס למרחב השורות ולכן

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $R(A)$. כעת

$$C(A) + R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

וקיבלנו קבוצה פורשת של $C(A) + R(A)$ שנמצאם אותה לבסיס. נשים את הוקטורים כעמודות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

ולכן קיבלנו צורה מדורגת שבשלושת העמודות הראשונות יש איברים מובילים ולכן בסיס אפשרי ל $C(A) + R(A)$ הם שלושת העמודות הראשונות במטריצה המקורית, כלומר

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $C(A) + R(A)$.

נעבור לחיתוך - נעביר קודם את $R(A)$ ו $C(A)$ להצגה ע"י משוואות (ע"י השוואת הוקטורים בבסיס של כל אחד לוקטור כללי ובדיקת מתי לעולם לא תהיה שורת סתירה). עבור $C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 4 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & \frac{3}{2} & y - \frac{1}{2}x \\ 0 & 3 & z + x \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & \frac{3}{2} & y - \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & z + -2y + 2x \end{array} \right)$$

ולכן

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z + -2y + 2x = 0 \right\}$$

כעת, עבור $R(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ -1 & 3 & y \\ 0 & -2 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ -1 & 3 & y + \frac{1}{2}x \\ 0 & -2 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ -1 & 3 & y + \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & z + \frac{2}{3}y + \frac{2}{6}x \end{array} \right)$$

ולכן

$$R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z + \frac{2}{3}y + \frac{2}{6}x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3z + 2y + x = 0 \right\}$$

מכאן ש

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} z + -2y + 2x = 0 \\ 3z + 2y + x = 0 \end{array} \right\}$$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \frac{16}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} & 0 \end{array} \right)$$

ולכן

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}t \\ -\frac{5}{6}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

3. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 0 \\ -3 & a+10 & 2a^2-2a+7 \\ 0 & 0 & 2a^2-2a-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

התלויה בפרמטר a הממשי ותהא

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 19 & -8 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מטריצה הפיכה ויהא

$$b = \begin{pmatrix} a \\ 3a+2 \\ 2a-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

וקטור עמודה.

(א) מצאו את ההופכית של B (כלומר מצאו את B^{-1})

פתרון: נשתמש באלגוריתם להפיכת מטריצה

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & -8 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & \frac{-5}{6} & \frac{19}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 19 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -5 & 19 & 6 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 3 & 0 & -15 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 33 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -48 & -18 & 24 \\ 0 & 3 & 0 & 33 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 6 & -9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ולכן

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 11 & 4 & -5 \\ 16 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו לאילו ערכי a למערכת $Ax = b$ אין פתרון יחיד (כלומר יש אינסוף פתרונות או שאין פתרון כלל).
פתרון: נדרג את המטריצה $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-2 & 0 & a \\ -3 & a+10 & 2a^2-2a+7 & 3a+2 \\ 0 & 0 & 2a^2-2a-4 & 2a-4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & a+10 & 2a^2-2a+7 & 3a+2 \\ 0 & a-2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2(a-2)(a+1) & 2a-4 \end{array} \right)$$

ולכן עבור $a \neq 2, -1$ נקבל צורה מדורגת ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ובמקרה זה יהיה פתרון יחיד.
עבור $a = 2$ נקבל שורת סתירה (בשורה השניה) ולכן לא יהיה פתרון. עבור $a = -1$ נקבל שורת סתירה בשורה השלישית וגם במקרה זה לא יהיה פתרון.

לכן התשובה לסעיף זה היא $\{2, -1\}$

(ג) מצאו לאילו ערכי a למערכת $AB^t x = b$ אין פתרון.

פתרון: נתחיל בכך שנשים לב שלכל x אם $AB^t x = b$ אז $A \cdot (B^t x) = b$ (כלומר אם v הוא פתרון למערכת

$AB^t x = b$ אז $B^t v$ הוא פתרון למערכת $Ax = b$).

בנוסף, מכיוון ש B הפיכה גם B^t הפיכה. ואז גם נקבל שלכל x אם $Ax = b$ אז $AB^t \cdot ((B^t)^{-1} x) = b$ (כלומר

אם v הוא פתרון למערכת $Ax = b$ אז $(B^t)^{-1} v$ הוא פתרון למערכת $AB^t x = b$).

מסקנה: ערכי a עבורם למערכת $AB^t x = b$ אין פתרון הם שווים לערכי a עבורם למערכת $Ax = b$ אין פתרון שזה מצאנו בסעיף הקודם שזוהי קבוצת הערכים $\{2, -1\}$.

(ד) מצאו לאילו ערכי a למערכת $AB^t x = b$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון: כמו בסעיף הקודם נקבל שערכי a עבורם למערכת $AB^t x = b$ יש אינסוף פתרונות הם שווים לערכי a עבורם למערכת $Ax = b$ יש אינסוף פתרונות שמצאנו בסעיף (ב) שזוהי קבוצת ריקה $\{\}$.

(ה) בחרו ערך אחד של הפרמטר a עבורו למערכת $AB^t x = b$ יש פתרון יחיד.
פתרון: כמו שהסברנו מקודם זה שקול לבחור a עבורו למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד (שזה קורה אמ"מ למערכת $AB^t x = b$ יש פתרון יחיד).
 למשל $a = 0$

(ו) עבור הערך שבחרתם בסעיף הקודם - מצאו את הפתרון של המערכת $AB^t x = b$
פתרון: נתחיל עם המערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד נציב $a = 0$ במערכת המדורגת מסעיף (ב) ונמשיך לדרג

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ולכן $v = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא הפתרון היחיד למערכת $Av = b$ ולכן $(B^t)^{-1}v$ הוא הפתרון היחיד למערכת $AB^t x = b$,
 נחשב

$$(B^t)^{-1}v = (B^{-1})^t v = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 16 \\ 3 & 4 & 6 \\ -4 & -5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{88}{3} \\ 11 \\ -\frac{47}{3} \end{pmatrix}$$

4. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים עד דרגה 2. תהא $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י משפט ההגדרה, להיות העתקה היחידה המקיימת כי

$$\begin{aligned} T(4 + 3x + 10x^2) &= 0 + 0x + 0x^2 \\ T(x) &= 12 - 3x + 10x^2 \\ T(x^2) &= 8 - 3x + 5x^2 \end{aligned}$$

מצאו בסיס B של $\mathbb{R}_2[x]$ עבורו במטריצה המייצגת $[T]_B^B$ השורה השלישית היא שורת אפסים וגם העמודה הראשונה היא עמודת אפסים.

פתרון: נתחיל במציאת בסיס ל $\text{Im}T$. מתקיים כי

$$\text{Im}T = \text{span} \{0 + 0x + 0x^2, 12 - 3x + 10x^2, 8 - 3x + 5x^2\}$$

(כי $\text{Im}T$ נפרשת ע"י תמונה של בסיס). כיוון ש $12 - 3x + 10x^2, 8 - 3x + 5x^2$ (שני פולינומים ת"ל אמ"מ אחד כפולה של השני, מה שלא קורה כאן) נקבל ש $\{12 - 3x + 10x^2, 8 - 3x + 5x^2\}$ בסיס ל $\text{Im}T$ (פולינומים האפס לא משפיע על ה span). ולכן $\dim \text{Im}T = 2$ ולפי משפט המימדים $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \text{Im}T = 3 - 2 = 1$ ולכן $\ker T = \text{span} \{4 + 3x + 10x^2\}$ (כי נתון ש $4 + 3x + 10x^2$ נשלח לאפס). כעת נבדוק האם הבסיס של התמונה והבסיס של הגרעין בת"ל.

נבדוק זאת בעזרת וקטורי הקורדינאטות לפי הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$ של V (נשים בעמודה ונדרג)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 3 & -3 & -3 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הגענו לצורה מדורגת עם משתנה חופשי ולכן הם ת"ל ולכן תת המרחב $\text{span}\{4 + 3x + 10x^2, 12 - 3x + 10x^2, 8 - 3x + 5x^2\}$ הוא מימד 2. מכיון ש

$$\text{Im}T = \text{span}\{12 - 3x + 10x^2, 8 - 3x + 5x^2\} \subseteq \text{span}\{4 + 3x + 10x^2, 12 - 3x + 10x^2, 8 - 3x + 5x^2\}$$

מאותו מימד הם שווים ובפרט

$$\ker T = \text{span}\{4 + 3x + 10x^2\} \subseteq \text{Im}T$$

וגם

$$\text{Im}T = \text{span}\{4 + 3x + 10x^2, 12 - 3x + 10x^2\}$$

(כיוון ש $4 + 3x + 10x^2, 12 - 3x + 10x^2, p(x)$ נמצא $p(x)$ כך ש $4 + 3x + 10x^2, 12 - 3x + 10x^2, p(x)$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$. נסמן בסיס זה ב B ונקבל כי

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהפולינום הראשון ב B שייך ל $\ker T$ ושני הפולינומים הראשונים ב B הם בסיס ל $\text{Im}T$ (ולכן $T(p(x))$ הוא צ"ל שלהם). נראה כי $p(x) = 10x^2$ יקיים את המבוקש. נדרג את המטריצה שעמודותיה הם וקטורי הקורדינאטות של $p(x), 4 + 3x + 10x^2, 12 - 3x + 10x^2$ לפי הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$ ונראה כי עמודות אלו בת"ל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וקיבלנו צורה מדורגת ללא משתנים חופשיים כנדרש.

חלק ב

5. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ונניח כי $m \geq 2$ טבעי מקיים כי $A^m = 0$ וגם $A^{m-1} \neq 0$

(א) הוכיחו/הפריכו: קיים $v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ בת"ל
פתרון: הוכחה: כיוון ש $A^{m-1} \neq 0$ קיים v כך ש $A^{m-1}v \neq 0$. נראה $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ בת"ל. יהא

$$\alpha_1 v + \alpha_2 Av + \dots + \alpha_m A^{m-1}v = 0$$

צירוף לינארי שלהם שמתאפס ונראה כי כל המקדמים שווים לאפס (כלומר $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$). כיוון ש $A^m = 0$ נקבל שלכל k טבעי מתקיים כי $A^{m+k} = A^m A^k = 0 A^k = 0$ ולכן לכל k טבעי מתקיים כי $A^{m+k} v = 0$. כעת נכפיל את שני האגפים של השויון ההתחלתי ב A^{m-1} ונקבל

$$A^{m-1} (\alpha_1 v + \alpha_2 Av + \dots + \alpha_m A^{m-1} v) = A^{m-1} 0 = 0$$

ולכן

$$\alpha_1 A^{m-1} v + \alpha_2 A^m v + \dots + \alpha_m A^{m+(m-2)} v = 0$$

ולכן $\alpha_1 A^{m-1} v = 0$ (כל שאר המחוברים מתאפסים). בצירוף העובדה ש $A^{m-1} v \neq 0$ נסיק ש $\alpha_1 = 0$ ונקבל את השויון ההתחלתי בצורה יותר פשוטה - $\alpha_2 Av + \dots + \alpha_m A^{m-1} v = 0$. נפעיל על שויון זה A^{m-2} ונקבל כי $\alpha_2 A^{m-1} v = 0$ ולכן $\alpha_2 = 0$. באופן דומה, נקבל כי $\alpha_3 = 0$ עד $\alpha_m = 0$ וסיימנו. בצורה פורמלית יותר, נוכל להשתמש באינדוקציה שלמה לטעון ש: לכל i טבעי אם $1 \leq i \leq m$ אז $\alpha_i = 0$ הוכחה:

- בסיס $i = 1$: עבור $i = 1$ מתקיים כי $1 \leq i \leq m$ וצריך להוכיח כי $\alpha_1 = 0$ וזה כבר עשינו.
 - צעד: נניח נכונות עד $i > 1$ (לא כולל) מסוים ונוכיח נכונות עבור i . צ"ל אם $1 \leq i \leq m$ אז $\alpha_i = 0$. נניח כי $1 \leq i \leq m$ וצ"ל $\alpha_i = 0$. מהנחת האינדוקציה נקבל כי $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_{i-1} = 0$ ולכן נשארנו עם השויון

$$\alpha_i A^{i-1} v + \alpha_{i+1} A^i v + \dots + \alpha_m A^{m-1} v = 0$$

שעליו נפעיל את A^{m-i} (במידה ו $i = m$ נשארנו עם השויון $\alpha_m A^{m-1} v = 0$ ונסיק כי $\alpha_m = 0$) לקבל כמו מקודם

$$A^{m-i} (\alpha_i A^{i-1} v + \alpha_{i+1} A^i v + \dots + \alpha_m A^{m-1} v) = A^{m-i} 0 = 0$$

ומכיוון ש

$$A^{m-i} (\alpha_i A^{i-1} v + \alpha_{i+1} A^i v + \dots + \alpha_m A^{m-1} v) = \alpha_i A^{m-1} v + \alpha_{i+1} A^m v + \dots + \alpha_m A^{m+(m-i-1)} v = \alpha_i A^{m-1} v$$

נקבל ש $\alpha_i A^{m-1} v = 0$ ונסיק כי $\alpha_i = 0$ (בצירוף העובדה ש $A^{m-1} v \neq 0$).

(ב) הוכיחו/הפריכו: $A^n = 0$ (שימו לב ש n הוא גודל המטריצה)

פתרון: הוכחה: לפי הסעיף הקודם קיבלנו שקיימים m וקטורים בת"ל. ולכן $m \leq n$ (שהרי ב \mathbb{F}^n הקבוצה הבת"ל מקסמאלית מכילה n איברים) ולכן

$$A^n = A^m A^{n-m} = 0 A^{n-m} = 0$$

כנדרש (במקרה ש $m = n$ אז מהנתון כבר נסיק ש $A^n = A^m = 0$).

(ג) הוכיחו/הפריכו: $\text{rank} A \leq \frac{n}{2}$ (שימו לב ש n הוא גודל המטריצה)

פתרון: הפרכה: למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

מקיימת כי $A^3 = 0$ וגם $A^2 \neq 0$ (ולכן $m = 3$) אבל $\frac{n}{2} = \frac{2}{2} > 2 = \text{rank} A$.

6. יהא V מ"ו והיו $v_1, \dots, v_n \in V$ בת"ל נסמן Q את קבוצת כל הוקטורים $v \in V$ המקיימים כי $v_1 + v, \dots, v_n + v$ בת"ל.

(א) הוכיחו/הפריכו: Q הוא תת מרחב של V .

פתרון: הפרכה: למשל וקטור האפס לא שייך ל Q . שהרי $v_1 + 0, \dots, v_n + 0$ זה הוקטורים v_1, \dots, v_n שבת"ל לפי הנתון.

(ב) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $Q \subseteq \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$

פתרון: הוכחה: יהא $v \in Q$ אזי $v_1 + v, \dots, v_n + v$ בת"ל ולכן קיים צי"ל לא טריוואלי

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i + v) = 0$$

(כלומר קיים j כך ש $\alpha_j \neq 0$). מכיוון ש $\sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i + v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i v$ נקבל אחרי העברת אגף כי

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) v$$

ואז נסמן $\beta = (-\sum_{i=1}^n \alpha_i)$ ונוכיח כי $\beta \neq 0$ ונקבל כי

$$v = \beta^{-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n (\beta^{-1} \alpha_i) v_i \in \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$$

כנדרש. נוכיח שאכן $\beta \neq 0$. נניח בשלילה כי $\beta = 0$ ונקבל כי

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) v = \beta v = 0$$

ומכיוון ש v_1, \dots, v_n בת"ל נקבל כי $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ בסתירה לכך ש $\alpha_j \neq 0$.

(ג) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $Q = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = -1\}$

פתרון: הוכחה: הכלה דו-כיוונית ישירה:

(\subseteq) יהא $v \in Q$ אזי $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ולכן קיים צ"ל לא טריוואלי

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i + v) = 0$$

וכמו מקודם נקבל כי $v = \beta^{-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n (\beta^{-1} \alpha_i) v_i$ כאשר $\beta = (-\sum_{i=1}^n \alpha_i) \neq 0$. בנוסף

$$\beta^{-1} \alpha_1 + \beta^{-1} \alpha_2 + \dots + \beta^{-1} \alpha_n = \beta^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = -\frac{(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}{(\sum_{i=1}^n \alpha_i)} = -1$$

ולכן $v \in \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = -1\}$ (שהרי הסכום של המקדמים של $v = \sum_{i=1}^n (\beta^{-1} \alpha_i) v_i$ שווה למינוס אחד).

(\supseteq) יהא $v \in \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = -1\}$ אזי קיימים סקלרים כך ש $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ וגם $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -1$.

צ"ל $v \in Q$. כלומר צ"ל כי $v_1 + v, \dots, v_n + v$ ת"ל.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i + v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + (-v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \left(-\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = 0$$

ולכן $\sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i + v) = 0$ וזהו צ"ל לא טריוואלי (שהרי אם המקדמים היו כולם אפס אז $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \neq -1$)

ולכן $v_1 + v, \dots, v_n + v$ ת"ל כנדרש.

פתרון נוסף:

יהא $v \in Q$ אזי, לפי סעיף קודם, קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, כך ש

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

ובנוסף $v_1 + v, \dots, v_n + v$ ת"ל. נגדיר $W = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$ ונקבל כי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל W וגם

$v_1 + v, \dots, v_n + v \in W$. כעת $v_1 + v, \dots, v_n + v$ ת"ל שקול לכך ש $[v_1 + v]_B, \dots, [v_n + v]_B$ ת"ל. נגדיר

מטריצה A שאלו עמודותיה. במפורש,

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ & [v_1 + v]_B & \cdots & [v_n + v]_B & \\ & & & & \end{array} \right)$$

והיא מטריצה ריבועית (היא בגודל $n \times n$). נקבל ש $[v_1 + v]_B, \dots, [v_n + v]_B$ ת"ל שקול לכך שעמודות A ת"ל שזה שקול (מכיוון ש A ריבועית) ש A אינה הפיכה שזה שקול לכך ש $\det A = 0$. נחשב את A מפורשות יותר ונחשב את הדטרמיננטה שלה. לפי הגדרה (ומכך שהעקת הייצוג לפי בסיס B היא ה"ל) נקבל ש

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{c|ccc} [v_1 + v]_B & & & \\ \hline & \cdots & & \\ & & [v_n + v]_B & \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} [v_1]_B + [v]_B & & & \\ \hline & \cdots & & \\ & & [v_n]_B + [v]_B & \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 1 + \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וכעת נחשב את הדטרמיננטה של A . דבר ראשון נחבר לשורה האחרונה את כל השורות שלפניה (כלומר נבצע את פעולות הדירוג $R_n + R_1, \dots, R_n + R_{n-1}$) שלא משנות את הדטרמיננטה ונקבל

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 1 + \alpha_n \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i & 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i & \cdots & 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

ונוכל להוציא גורם משותף משורה האחרונה ולהמשיך

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left| \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

ואז נבצע את הפעולות $R_1 - \alpha_1 R_n, \dots, R_{n-1} - \alpha_{n-1} R_n$ (שלא משנות את הדטרמיננטה) ונמשיך לקבל

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

ומכיוון ש $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ משולשית (תחתונה) עם 1ים על האלכסון נקבל שהדטרמיננטה שלה שווה אחד

ובסה"כ נקבל ש $|A| = (1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i)$. לכן A לא הפיכה אם"מ $(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i) = 0$ אם"מ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -1$ כנדרש.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב"). במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").