תשובות לתרגיל 6 מתמטיקאים

שאלה 1

1. היות ו $2\ln x \le \ln^2 x$ (החל מנקודה כלשהיא) אז

$$e^{-\ln x^2} \le e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

היות ו $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס, אז גם האינטגרל שלנו מתכנס.

2. נפצל את האינטגרל (נראה עוד שניה למה)

$$\int\limits_0^\infty x^2 \sin x^4 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2 \sin x^4 \mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty x^2 \sin x^4 \mathrm{d}x$$

האינטגרל הראשון הוא אינטגרל רגיל והוא קיים. בשביל האינטגרל השני נציב $t = x^4$ כלומר $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$ ולכן

$$\int\limits_1^\infty x^2 \sin x^4 \mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{x}\mathrm{d}t = \int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt[4]{t}}\mathrm{d}t$$

(פיצלנו בהתחלה את התחום כדי שכאן לא נגיע לאינטגרל לא אמיתי (גם) מסוג שני.) האינטגרל שהתקבל מתכנס לפי דיריכלה.

3. מתכנס לפי דיריכלה.

4. נשים לב ש

$$\frac{\cos^2(x)}{x} \le \frac{|\cos x|}{x}$$

והיות שבסעיף הבא נראה שיש התבדרות גם האינטגרל שלנו מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

5.

$$\int\limits_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{2\cos(x)}{x}\mathrm{d}x$$

האינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה והאינטגרל השמאלי מתבדר לכן בסך הכל האינטגרל מתבדר.

6.

$$\int\limits_1^\infty \frac{x - \arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x - \int\limits_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

את האינטגרל השמאלי פותרים עם הצבה $t = \arctan x$ ואז

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

שזה מתכנס. והאינטגרל הימני

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

גם מתכנס לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{x^3}$ ולכן בסך הכל האינטגרל מתכנס.

שאלה 2

אם $\alpha \leq 1$ אז בגלל ש

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

ברור שהאינטגרל מתבדר. לעמות זאת אם $\alpha > 1$ אז היות ו

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$$

שהאינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה וגם האינטגרל השמאלי מתכנס ולכן האינטגרל הכולל גם מתכנס.

שאלה 3

סעיף א

אם f לא מתכנסת בכלל, אז בגלל שהיא יורדת יש שלב שבו היא יותר קטנה מ -1. בגלל שבשלב הזה f היא שלילית ו -1 כמובן שלילי אפשר להשתמש במבחן ההשוואה ולומר ש $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ לא מתכנס כי $\int_0^\infty -1\mathrm{d}x$ לא מתכנס.

לכן בהכרח f מתכנסת כלומר

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

נניח ש $a \neq 0$. אם $a > 0$ אז בוודאי ש $f(x) > 0$ ואם $a < 0$ אז יש שלב שבו f היא שלילית ולכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a} = 1$$

ולומר ש $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ לא מתכנס. סתירה.

לכן בהכרח

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

סעיף ב

למשל הפונקציה משאלה 1 סעיף ב.

שאלה 4

סעיף א

נציב $z = \int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ואז $\mathrm{d}z = f(x)\mathrm{d}x$ כלומר

$$\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int\limits_a^\infty \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \infty$$

כאשר $a = \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ נשים לב שהשתמשנו בנתון $\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \infty$ כדי לקבוע את הגבול העליון של האינטגרל אחרי הצבה.

סעיף ב

נבחר

$$f(x) = e^{-x}$$

ואז לפי השיקול בסעיף א נקבל

$$\int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{1}{z}\mathrm{d}z < \infty$$

כאשר $a = \int\limits_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-1}$ ו $b = \int\limits_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

שאלה 5

סעיף א

בכל תת קטע מן הצורה $[1, a]$ יש לפונקציה מספר סופי של נקודות אי רציפות ולכן היא אינטגרבילית.

סעיף ב

$$x - 1 \leq [x]$$

ולכן

$$\frac{1}{1+[x]^2} \leq \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

לפי מבחן ההשוואה האינטגרל מתכנס.