אוניברסיטת בר אילן,
המחלקה למתמטיקה.

קורס: 89-133, חשבון אינפי' 2, סמסטר ב', תשע"ב.
מתרגלים: ויקי בליזניאנסקי,
בועז ויינר,
מיכאל מיכאלי.

תרגיל 2 -פתרון

<u>שאלה 1</u>

עבור אילו ערכי הפרמטר a העקומה

$$y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$

תהייה קעורה כלפי מעלה לכל x ממשי?

פתרון:

צריך לבדוק עבור אילו ערכי a מתקיים $y'' > 0$ לכל x ממשי.

$$y'' = 12x^2 + 6ax + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2ax + 1 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} = a^2 - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < a < 2$$

<u>שאלה 2:</u>

מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה $y = 2x - \arccos\frac{1}{x}$.

פתרון:

תחום ההגדרה של הפונקציה

$$-1 \le \frac{1}{x} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{x} \ge 0 \\ \frac{1-x}{x} \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left((-\infty,-1] \cup (0,\infty)\right) \cap \left((-\infty,0) \cup [1,\infty)\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$

כלומר $D_y = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

לפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות (שימו לב: לא בודקים את $x = 0$ לאסימפטוטה, כי הפונקציה לא מוגדרת בסביבה של $x = 0$)

נמצא את האסימפטוטות האופקיות:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(2x - \arccos\frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(2x - \arccos\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

ולכן לפונקציה אין אסימפטוטות אופקיות.

נמצא את האסימפטוטות המשופעות $y = ax + b$:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 - \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x - \arccos\frac{1}{x} - 2x\right) = -\frac{\pi}{2}$$

ולכן לפונקציה יש אסימפטוטה משופעת אחת $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

<u>שאלה 3 :</u>

חקרו את הפונקציות הבאות

1. $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$ (בכל תחום הגדרתה)
2. $y = x + \sin(2x)$ (בקטע $[-2\pi, 2\pi]$)

על פי הסעיפים הבאים :

א. תחום ההגדרה
ב. זוגיות
ג. נקודות חיתוך עם הצירים
ד. נקודות קיצון
ה. תחומי עליה וירידה
ו. נקודות פיתול
ז. תחומי קעירות (כלפי מעלה וכלפי מטה)
ח. אסימפטוטות
ט. סקיצה של הגרף

<u>פתרון :</u>

1. $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$

א. $D_y = \mathbb{R}$

ב. הפונקציה חסרת זוגיות (לא זוגית ולא אי זוגית)

ג. חיתוך עם ציר ה- x :

$$\sqrt{1+x^2}+2x=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=-2x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+x^2=4x^2\\ x<0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\frac{1}{3}\\ x<0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

כלומר נקודת חיתוך עם ציר ה- x $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$.

נקודת חיתוך עם ציר ה- y : $(0,1)$.

ד. נקודות קיצון

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2=0$$
$$\Leftrightarrow x+2\sqrt{1+x^2}=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4+4x^2=x^2\\ x<0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2=-4\\ x<0\end{cases}$$

למשוואה האחרונה אין פתרונות ממשיים ולכן לפונקציה אין נקודות קיצון.

ה. תחומי עלייה וירידה

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2$$
$$y'=\frac{x+2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}>0 \quad \forall x>0$$

ולכן הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ו. נקודות פיתול

$$y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}>0 \quad \forall x$$

ולכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה ולכן אין לפונקציה נקודות פיתול.

ז. הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.

ח. אסימפטוטות:
אנכיות-אין
אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2}{\sqrt{1+x^2}-2x}=-\infty$$

ולכן אין אסימפטוטות אופקיות

משופעות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}=3$$

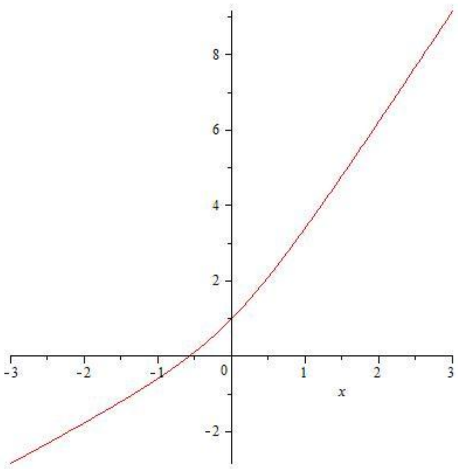
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$$

ולכן לפונקציה שתי אסימפטוטות משופעות $y=3x$ כאשר $x\to\infty$ ו- $y=x$ כאשר $x\to-\infty$.

ט



2. $y=x+\sin(2x)$ (בקטע $[-2\pi,2\pi]$)

א.
$[-2\pi,2\pi]$

ב. $y(-x)=-x+\sin(-2x)=-x-\sin(2x)=-y(x)$ ולכן הפונקציה אי זוגית.

ג. חיתוך עם ציר ה- x : $x+\sin(2x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ולכן $(0,0)$ נקודת חיתוך עם ציר ה- x.
חיתוך עם ציר ה- y : $(0,0)$.

ד. נקודות קיצון

$$y'=1+2\cos(2x)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3} \vee 2x=\frac{4\pi}{3} \vee 2x=\frac{8\pi}{3} \vee 2x=\frac{10\pi}{3} \vee 2x=-\frac{2\pi}{3} \vee 2x=-\frac{4\pi}{3} \vee 2x=-\frac{8\pi}{3} \vee 2x=-\frac{10\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{3} \vee x=-\frac{\pi}{3} \vee x=-\frac{2\pi}{3} \vee x=-\frac{4\pi}{3} \vee x=-\frac{5\pi}{3}$$

כדי לבדוק האם הנקודות שמצאנו הן נקודות קיצון נגזור פעם נוספת ונבדוק סימן של הנגזרת השנייה בנקודות הללו.

$$y''=-4\sin(2x)$$
$$y''\left(\frac{\pi}{3}\right), y''\left(\frac{4\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{2\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{5\pi}{3}\right)<0$$

ולכן הנקודות

$$\left(\frac{\pi}{3}, y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \left(\frac{4\pi}{3}, y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{5\pi}{3}, y\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

הן נקודות מקסימום מקומי של הפונקציה.

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right), y''\left(\frac{5\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{4\pi}{3}\right)>0$$

ולכן הנקודות

$$\left(\frac{2\pi}{3}, y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \left(\frac{5\pi}{3}, y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{\pi}{3}, y\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{4\pi}{3}, y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

הן נקודות מינימום מקומי של הפונקציה.

ה. תחומי עלייה וירידה:
תחומי עלייה:

$$\left(-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$$

תחומי ירידה:

$$\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

ו. נקודות פיתול:

$$y'' = -4\sin(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = \pi n$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2} \quad n = -3,-2,-1,0,1,2,3$$

צריך לבדוק את סימני הנגזרת השנייה מסביב לנקודות הללו.
הסימנים מתחלפים ולכן הנקודות

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, y\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right), \left(-\pi, y(-\pi)\right), \left(-\frac{\pi}{2}, y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(0, y(0)\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(\pi, y(\pi)\right), \left(\frac{3\pi}{2}, y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

הן נקודות פיתול.

ז. תחומי קעירות:
תחומי קעירות כלפי מטה:

$$\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

תחומי קעירות כלפי מעלה:

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

ח. לפונקציה אין אסימפטוטות, כי בקצוות הקטע הפונקציה רציפה (משמאל בקצה הימני ומימין בקצה השמאלי) ובתוך הקטע הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל הנקודות.

ט.