תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ד' כסלו ה'תשע"ז, **4/12/16**.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא אגודה? האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם היא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

1. $(\mathbb{N}, \max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.
2. $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

שאלה 2. קבעו האם תת הקבוצה הנתונה הינה תת חבורה:

1. $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ (עם חיבור).
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (עם חיבור).

שאלה 3. הוכיחו או הפריכו:

1. כל חבורה ציקלית היא חבורה אבלית.
2. כל חבורה אבלית היא ציקלית.

שאלות להגשה

שאלה 4. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא אגודה? האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם היא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{Z}, *)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ב. $(\mathbb{R}, *)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a * b = \sqrt{a + b}$.

ג. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ד. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ה. $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},\circ)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a\circ b=a+b+ab$. רמז: קודם הוכיחו שזו פעולה סגורה.

שאלה 5. תהי G חבורה. הוכיחו כי G היא אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים כי $(ab)^2=a^2b^2$.

שאלה 6. תהי קבוצה $S=\{a,b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S,*)$ היא:

א. אגודה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

שאלה 7. בכל סעיף, קבעו האם תת-הקבוצה הנתונה היא תת-חבורה:

א. $8\mathbb{Z}_{12}=\{8k|k\in\mathbb{Z}_{12}\}\subseteq\mathbb{Z}_{12}$.

ב. $k\mathbb{U}_n\subseteq\mathbb{U}_n$ כאשר$(k,n)=1$ ($\mathbb{U}_n$ הינה חבורת אויילר ה-n).

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|a,b,c\in\mathbb{Z}_p\right\}\subseteq GL_3(\mathbb{Z}_p)$.

תזכורת: $GL_3(\mathbb{Z}_p)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות מעל $\mathbb{Z}_p$ מסדר 3×3.

ד. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f\text{ is invertible and }f(1)>0\}\subseteq\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f\text{ is invertible}\}$.

ה. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f\text{ is invertible and }f(1)=1\}\subseteq\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f\text{ is invertible}\}$.

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות).

שאלה 8. תהי G חבורה, ויהיו $H,K\leq G$ תתי-חבורות של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H\cap K\leq G$ היא תת-חבורה של G.

ב. $H\cup K\leq G$ היא תת-חבורה של G.

שאלה 9. תהי G חבורה, ויהיו $a,b\in G$. הוכיחו או הפריכו את כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $o(a),o(b)<\infty$, אזי $o(ab)<\infty$ וכן $o(ab)=o(a)\,o(b)$.

ב. $o(ab)=o(ba)$ (יש להתייחס גם למקרה שבו הסדר אינסופי).

שאלה 10. תהי $G=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ חבורה אבלית סופית. יהי איבר $b=a_1a_2\cdots a_n$.

א. הוכיחו $b^2=e$.

ב. הוכיחו שאם אין ב-G איבר מסדר 2, אז $b=e$.

שאלות רשות

שאלה 11. נזכיר שמשפט השאריות הסיני אומר שאם n, m זרים, אזי לכל $a, b \in \mathbb{Z}$ קיים x יחיד עד כדי שקילות מודולו nm כך ש-$x \equiv a \pmod{n}$, $x \equiv b \pmod{m}$.

הוכחנו כי $x = bsn + atm$ מקיים את הדרוש. הוכיחו שזה הפתרון היחיד עד כדי שקילות מודולו nm.

רשות למי שרוצה לתרגל: מצאו $y \in \mathbb{N}$ כך ש-$y \equiv 3 \pmod{11}$ וגם $y \equiv 1 \pmod{8}$.

שאלה 12. פתרו את בעיה 443 מפרוייקט אוילר[1] (מומלץ לתכנת).

תהי $g(n)$ הסדרה המוגדרת לפי

$$g(4) = 13$$
$$g(n) = g(n-1) + \gcd(n, g(n-1)) \quad \forall n > 4$$

הערכים הראשונים של הסדרה הם

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(n)$	13	14	16	17	18	27	28	29	30	31	32	33	34	51	54	55	60

נתון כי $g(1000) = 2524$ וכי $g(1\,000\,000) = 2624152$. מצאו את $g(10^{15})$.

בהצלחה!

[1] המקור נמצא בדף `https://projecteuler.net/problem=443`.