

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 88-133-05/07

מרצים: פרופ' בועז צבאן, פרופ' שחר נבו.

מתרגלים: הדר קנר, אושרית שטוסל, עידו פלדמן, ראם וקסמן.

משך המבחן: 2.5 שעות, ללא חומר עזר.

ענה על 3 מ"4 שאלות. כל שאלה 32 נקודות על סדר, קריאות ונקיון. נמק תשובותיך.

1. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. הוכח שרדיוס ההתכנסות נתון לפי הנוסחה $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

(כאשר $\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0$).

2. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. חשב $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k-n)^2 + nk}$.

ב. תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות חסומות בקטע (a, b) ומתכנסת שם במ"ש. הוכיחו שהסדרה הזו חסומה **במידה אחידה**, כלומר שקיים $m > 0$, כך שלכל n ולכל $a < x < b$ מתקיים

$$|f_n(x)| \leq m$$

3. נגדיר לכל $x > 1$, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

א. הוכח כי לכל $\varepsilon > 0$ הטור הנייל מתכנס במ"ש בקרן $[1 + \varepsilon, \infty)$.

ב. הוכח כי הטור מגדיר פונקציה גזירה בקרן $(1, \infty)$. מהי $s'(x)$?

ג. האם הטור מתכנס במ"ש בקרן $(1, \infty)$?

4. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. האם קיימים האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx, \quad \int_0^1 \frac{1 - \cos(x)}{x\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx$$

ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$xe^{-x^2} < \int_0^x e^{-t^2} dt < \arctan(x)$$

בהצלחה!