בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ,מועד א' -פתרון

מרצים: מר אחיה בר-און, גברת תמר בר-און, מר בארי גרינפלד, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, יפעת חדד, עוזי חרוש, עומר נטר, גלעד פורת-קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 6 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 106. ציון מעל 100 יעוגל ל 100 (חלק א 70 נקודות וחלק ב 36 נקודות)
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

חלק א

1. נגדיר שתי פרידקטים: $P(k)$ המביע כי k זוגי ו $S(k,m)$ המביע כי $k+m$ מתחלק ב 3 ללא שארית (משתני הפרדיקטים נלקחים מהטבעיים. הערה: 0 אינו טבעי).

(א) מצאו קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש $\{3,5,9\} \subseteq A$ שעבורה הפסוק

$$\forall k \in A : \ (P(k) \vee (\exists m \in A : \ k < m))$$

בעל ערך אמת True. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: הפסוק אומר במילים: לכל איבר k ב A מתקיים ש: או ש k זוגי או שקיים איבר ב A שגדול ממנו. ולכן נדאג שב A יהיה איבר גדול ביותר ושהוא יהיה זוגי. למשל $A=\{3,5,9,10\}$. ואז אכן לכל איבר ב A או שהוא זוגי (כלומר 10 במקרה שלנו) או (עבור שאר האיברים האי-זוגיים) שקיים איבר ב A שגדול מהם (כן? $3<10, 5<10, 9<10$).

(ב) מצאו קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש $\{4,5,9\} \subseteq A$ שעבורה הפסוק

$$\exists k \in A \forall m \in A : \ (S(k,m) \vee P(m))$$

בעל ערך אמת True. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: הפסוק אומר במילים: קיים איבר k ב A כך שלכל איבר m ב A מתקיים ש: או ש m זוגי או שהסכום $k+m$ מתחלק ב 3. נניח בשלילה שקיים כזאת A (כנדרש בשאלה). אזי קיים $k \in A$ עבורו מתקיים ש $\forall m \in A :$ $(S(k,m) \vee P(m))$ בפרט זה מתקיים עבור $m_1=5, m_2=9$ (שהרי אלו איברים ב A) כיוון ש m_1, m_2 אי-זוגיים אז מתקיים כי $S(k,m_1)$ וגם $S(k,m_2)$ כלומר מתקיים ש $k+m_1$ מתחלק ב 3 ללא שארית וגם $k+m_2$ מתחלק ב 3 ללא שארית. כלומר

$$k+m_1 \equiv 0 \mod 3$$
$$k+m_2 \equiv 0 \mod 3$$

אבל $m_1 \equiv 2 \mod 3$ ו $m_2 \equiv 0 \mod 3$ ולכן נקבל ש

$$\begin{aligned} k+2 &\equiv 0 \mod 3 \\ k &\equiv 0 \mod 3 \end{aligned}$$

כלומר ש $k+2$ מתחלק ב 3 ללא שארית, שזה אומר ש k מתחלק ב 3 עם שארית 1 ומצד שני k מתחלק ב 3 ללא שארית. סתירה.

(ג) תהיינה שתי קבוצות A, C עבורן נתון כי

$$\begin{aligned} \{4,6,7,8,13\} &= A \\ \{2,3,5\} &\subseteq C \end{aligned}$$

מצאו קבוצה B עבורה מתקיים בהכרח $C \subseteq A \triangle B$. אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: נגדיר $B = A$ ואז $A \triangle B = A \triangle A = \emptyset$ שמוכל ב C.

(ד) תהיינה שתי קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \{6,7,8,9,10\} \\ B &= \{2,4,5,7,8\} \end{aligned}$$

מצאו קבוצה X עבורה מתקיים $X \in P(A \cup B)$ אך $X \notin P(A) \cup P(B)$ (כאשר $P(*)$ הוא סימון שקבוצה החזקה של $*$). אם אין קבוצה כזאת הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: נגדיר $X = \{2,6\}$ ואז $X \subseteq A \cup B$ ולכן $X \in P(A \cup B)$. מצד שני $X \nsubseteq A$ וגם $X \nsubseteq B$ ולכן $X \notin P(A)$ וגם $X \notin P(B)$.

2. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n)$ הוא כמות המספרים (הטבעיים) המחלקים את n. במפורש

$$f(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} : \ n = ka\}|$$

(הערה 0 אינו טבעי). תהא

$$A = \{5,6,8,9,12,15,18,24,30,121\}$$

ונגדיר על A יחס סדר R על ידי הכלל: aRb אמ"מ

$$(f(a) < f(b)) \vee (a = b)$$

(הערה: אין צורך להוכיח כי זהו יחס סדר).

(א) חשבו את $f(24)$

פתרון: מתקיים $24 = 2^3 \cdot 3$ (הפירוק של 24 לראשוניים) ולכן קבוצת כל המחלקים שלו הם $\left\{2^i 3^j \mid i \in \{0,1,2,3\}, j \in \{0,1\}\right\}$ ומספרם הוא $4 \cdot 2 = 8$ (כל בחירה שונה לז i, j תתן מחלק אחר) ולכן $f(24) = 8$ באופן כללי אם n מספר טבעי ו $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ כאשר $p_1, \dots p_k$ מספרים ראשוניים שונים זה מזה ו $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ חזקות (טבעיות) אז קבוצת המחלקים של n היא

$$\left\{p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \mid \beta_1 \in \{0, \dots \alpha_1\}, \dots \beta_k \in \{0, \dots, \alpha_k\}\right\}$$

ולכן

$$f(n) = \left|\left\{p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \mid \beta_1 \in \{0, \dots \alpha_1\}, \dots \beta_k \in \{0, \dots, \alpha_k\}\right\}\right| = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

.

(ב) מצאו את קבוצת כל האיברים המקסמאליים ב A.

(ג) מצאו את קבוצת כל האיברים המינימאליים ב A.

(ד) מצאו את קבוצת כל האיברים הגדולים ביותר ב A.

(ה) מצאו את קבוצת כל האיברים הקטנים ביותר ב A.

פתרון: נרשום את הפירוק למכפלה של ראשוניים של המספרים המופיעים ב A,

$$\begin{aligned}
5 &= 5 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
8 &= 2^3 \\
9 &= 3^2 \\
12 &= 3 \cdot 2^2 \\
15 &= 3 \cdot 5 \\
18 &= 2 \cdot 3^2 \\
24 &= 2^3 \cdot 3 \\
30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
121 &= 11^2
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
f(5) &= 2 \\
f(6) &= 2 \cdot 2 = 4 \\
f(8) &= 4 \\
f(9) &= 3 \\
f(12) &= 2 \cdot 3 = 6 \\
f(15) &= 2 \cdot 2 = 4 \\
f(18) &= 2 \cdot 3 = 6 \\
f(24) &= 4 \cdot 2 = 8 \\
f(30) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\
f(121) &= 3
\end{aligned}$$

ולכן $\{5\}$ היא קבוצת כל האיברים המינמאליים (אין איבר עם $f(*)$ יותר קטן ממש ממנו בקבוצה A). יותר מכך לכל $a \in A$ ששונה מ 5 מתקיים כי $f(5) < f(a)$ ולכן $(5, a) \in R$ ולכן 5 הוא האיבר הקטן ביותר ו $\{5\}$ הוא קבוצת כל האיברים הקטנים ביותר.

בנוסף, $\{24, 30\}$ היא קבוצת כל האיברים המקסימאליים (אין איבר עם $f(*)$ יותר גדול ממש מכל אחד מהם בקבוצה A). אין איברים גדולים ביותר מכיוון שאם יש אז יש רק אחד ואז הוא מקסמאלי יחיד אבל אצלנו יש 2 מקסימאליים ולכן קבוצת כל האיברים הגדולים היא קבוצה ריקה.

3. תהא $A = \{1, \ldots, 10\}$ קבוצת המספרים הטבעיים בין 1 ל 10 (כולל 1 וכולל 10). נגדיר יחס R על A להיות

$$R = \{(8,8), (9,8), (7,1), (4,7)\}$$

ונגדיר S להיות קבוצת כל יחסי השקילות על A שמכילים את R ונסמן $T = \cap_{X \in S} X$.

(א) הוכיחו/הפריכו: T יחס שקילות. במידה והוא יחס שקילות, מצאו את מחלקת השקילות $[9]_T$. במידה ו T אינו יחס שקילות, הזינו $\{\}$ (למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: נראה תחילה ש $T = \cap_{X \in S} X$ הוא יחס שקילות.

– רפלקסיביות: יהא $a \in A$ צ"ל $(a, a) \in T$. כל $X \in S$ הוא יחס שקילות על A ולכן $(a, a) \in X$ ולכן (a, a) נמצא בחיתוך של כולם שזה T

– סימטריות: יהיו $a, b \in A$ כך ש $(a, b) \in T$ וצ"ל $(b, a) \in T$. כיוון ש $(a, b) \in T$ נקבל שלכל $X \in S$ מתקיים $(a, b) \in X$. מכיוון שכל $X \in S$ הוא יחס שקילות ולכן סימטרי נקבל שגם $(b, a) \in X$ ולכן (b, a) שייך בחיתוך של כולם שזה T

– טרנזיטיבות: יהיו $a,b,c\in A$ כך ש $(a,b)\in T$ וגם $(b,c)\in T$ וצ"ל $(a,c)\in T$. כיוון ש $(a,b)\in T$ וגם $(b,c)\in T$ נקבל שלכל $X\in S$ מתקיים $(a,b)\in X$ וגם $(b,c)\in X$. מכיוון שכל $X\in S$ הוא יחס שקילות ולכן טרנזיטיבי נקבל שגם $(a,c)\in X$ ולכן (a,c) שייך בחיתוך של כולם שזה T

כעת נמצא את T ונחשב את $[9]_T$: לכל יחס שקילות X המקיים כי $R\subseteq X$ מתקיים כי $1,7$ באותה מחלק שקילות כי $(7,1)\in X$ ומתקיים גם ש $1,4$ באותה מחלקת שקילות (כי $(7,1),(4,7)\in X$ ומכיוון שטרנזיטיבי גם $(4,1)\in X$). בנוסף $8,9$ באותה מחלקת שקילות כי $(9,8)\in X$ ולכן X חייב להכיל את

$$(\{1,4,7\}\times\{1,4,7\})\cup(\{8,9\}\times\{8,9\})\cup I_{\{2,3,5,6,10\}}$$

מכיוון שזהו יחס שקילות בעצמו (זה היחס המושרה מהחלוקה $\{\{1,4,7\},\{8,9\},\{2\},\{3\},\{5\},\{6\},\{10\}\}$) נקבל שזהו בדיוק T ולכן $[9]_T=\{8,9\}$

(ב) מצאו U, איבר מינימאלי ביחס להכלה בקבוצה $S\backslash\{T\}$ (כלומר בקס"ח $(S\backslash\{T\},\subseteq)$). כתבו כמה מחלקות שקילות יש בקבוצת המנה ${}^{A}/_{U}$.

פתרון: כמו שראינו, U מכיל את הקבוצה

$$(\{1,4,7\}\times\{1,4,7\})\cup(\{8,9\}\times\{8,9\})\cup I_{\{2,3,5,6,10\}}$$

(מכיוון שזהו יחס שקילות שמכיל את R) אבל לא שווה לו (כי זהו T). ב T יש 7 מחלקות שקילות (בצורה מפורשת: $\{\{1,4,7\},\{8,9\},\{2\},\{3\},\{5\},\{6\},\{10\}\}$) ולכן ב Uצריך להיות לכל היותר 6 מחלקות שקילות (אם היה 7 היינו מקבלים ש $U=T$ ויותר מ 7 לא יכול להיות (מאותה סיבות ממקודם, $1,4,7$ מתייחסים זה לזה ו $8,9$ מתייחסים זה לזה). נגדיר U להיות יחס השקילות

$$(\{1,4,7,8,9\}\times\{1,4,7,8,9\})\cup I_{\{2,3,5,6,10\}}$$

(שזה שקול לתת עוד נתון אחד ש $(1,8)\in U$) שיש לו 6 מחלקות שקילות שונות. למה הוא מינמאלי? כי אם היה יחס שקילת U' המקיים $R\subseteq U'\subseteq U$ אז היה לו לכל היותר 6 מחלקות (בגלל ש $R\subseteq U'$) ומצד שני הוא מוכל ב U שיש לו בדיוק 6 מחלקות שקילות וכל שני איברים שמתייחסים זה לזה ב U', מתייחסים זה לזה גם ב Uולכן $U'=U$שזה מוכיח כי U מינמאלי. (באופן דומה כל "מיזוג" של שני מחלקות שונות ב T למחלקת שקילות אחת תתן יחס שקילות מינמאלי עם 6 מחלקות שקילות).

4. נגדיר פונקציה $f:P(P(\mathbb{N}))\to P(\mathbb{N})$ ע"י הכלל $f(S)=\cap_{X\in S}X$ (הערה: הסימון $P(*)$ הוא סימון שקבוצה החזקה של $*$).

(א) תהי $A=\{1,2,8,9\}$. מצאו X_1,X_2 כך ש $f(X_1)=f(X_2)=A$ וגם $X_1\cap X_2=\emptyset$. אם לא קיימים X_1,X_2 כאלה, הזינו $\{\}$(למשתמשי XI. למשתמשים "רגילים" - אין צורך, גם ככה אתם צריכים לנמק את תשובותכם).

פתרון: נגדיר

$$X_1=\{A\},X_2=\{\{1,2,8,9,10\},\{1,2,8,9,11\}\}$$

ונקבל כי A $f(X_1)=A,f(X_2)=\{1,2,8,9,10\}\cap\{1,2,8,9,11\}$ ובנוסף $X_1\cap X_2=\emptyset$ כנדרש.

(ב) מצאו כמה מקורות שונים יש לקבוצה $\mathbb{N}\backslash\{2\}$ (ב XI ישנה אפשרות הזנת תשובה גם עבור אינסוף).

פתרון: יהא S מקור ל $\mathbb{N}\backslash\{2\}$ אזי $f(S)=\cap_{X\in S}X=\mathbb{N}\backslash\{2\}$ ולכן לכל $X\in S$ מתקיים כי $\mathbb{N}\backslash\{2\}\subseteq X$ ישנן שתי קבוצות שמכילות את $\mathbb{N}\backslash\{2\}$ והן $\mathbb{N}\backslash\{2\},\mathbb{N}$ ולכן

$$S=\{\mathbb{N}\backslash\{2\}\}$$

או

$$S=\{\mathbb{N}\backslash\{2\},\mathbb{N}\}$$

שתי אפשרות אלו הם מקור ל $\mathbb{N}\backslash\{2\}$ והם שונות (כמובן ש $\{\},\{\mathbb{N}\}$ לא מקורות של $\mathbb{N}\backslash\{2\}$ ובזה כיסנו את כל הקבוצות ב $P(\{\mathbb{N}\backslash\{2\},\mathbb{N}\})$ שהם הקבוצות האפשריות הבאות בחשבון בכלל). לכן התשובה הסופית פה היא 2.

חלק ב

5. תהא A קבוצה, נגדיר פונקציה $f:P(P(A))\times P(P(A))\to P(P(A))$ ע"י הכלל

$$f(X,Y)=\{C\triangle D\mid C\in X\wedge D\in Y\}$$

(א) הוכיחו כי לכל $X \subseteq P(A)$ מתקיים כי $|f(X,X)| \geq |X|$

פתרון: הוכחה: תהא $X \subseteq P(A)$ צ"ל $|f(X,X)| \geq |X|$. אם $X = \emptyset$ אזי $|X| = 0$ שקטן שווה מכל עוצמה אחרת, בפרט מ $|f(X,X|$.

אחרת, $X \neq \emptyset$ וקיים $C \in X$. נגדיר $g : X \to f(X,X)$ ע"י $g(D) = C \triangle D$ (לפי הגדרת f אכן מתקיים כי $C \triangle D \in f(X,X)$). נראה כי g חח"ע וזה יסיים את ההוכחה. אכן, נניח $g(C_1) = g(C_2)$ וצ"ל $C_1 = C_2$. מהגדרת g נקבל את השיוויון

$$C_1 \triangle D = C_2 \triangle D$$

ומכיוון שהפרש סימטרי הוא קיבוצי נקבל ש

$$C_1 = C_1 \triangle \emptyset = C_1 \triangle (D \triangle D) = (C_1 \triangle D) \triangle D = (C_2 \triangle D) \triangle D = C_2 \triangle (D \triangle D) = C_2 \triangle \emptyset = C_2$$

כנדרש.

(ב) הוכיחו כי לכל $X \subseteq P(A)$ שאינה סופית מתקיים כי $|f(X,X)| = |X|$

פתרון: הוכחה: תהא $X \subseteq P(A)$ צ"ל $|f(X,X)| = |X|$ כיוון אחד הוכחנו בסעיף קודם. נוכיח את הכיוון השני (כלומר ש $|f(X,X)| \leq |X|$) ואז לפי ק.ש.ב יש שיוויון.

נגדיר $g : X \times X \to f(X,X)$ ע"י $g((C,D)) = C \triangle D$ ואז לפי הגדרת f נקבל ש g על (יהא $E \in f(X,X)$ אז קיימים $C, D \in X$ כך ש $E = C \triangle D$ כלומר $g((C,D)) = C \triangle D = E$) ולכן

$$|f(X,X)| \leq |X \times X| = |X| \cdot |X| = \max\{|X|, |X|\} = |X|$$

כאשר השיוויון האמצעי נכון מכיוון ש X אינה סופית.

6. לכל n טבעי נגדיר יחס שקילות R_n על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י הכלל: $(f,g) \in R_n$ אמ"מ $f^{-1}[\{n\}] = g^{-1}[\{n\}]$ (אין צורך להוכיח שאלו יחסי שקילות).

(א) נקבע $n = 1$. תהא $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מצאו את עוצמת מחלקת שקילות. כלומר מצאו את $|[f]_{R_1}|$(חלקו למקרים)

פתרון: נגדיר $A = \mathbb{N} \backslash f^{-1}[\{1\}]$. ונגדיר $F : [f]_{R_1} \to (\mathbb{N} \backslash \{1\})^A$ ע"י שנגדיר את הפונקציה $F(g) = g|_A$. נשים לב שלכל $g \in [f]_{R_1}$ מתקיים כי $(f,g) \in R_1$ ולכן $f^{-1}[\{1\}] = g^{-1}[\{1\}]$ ולכן לכל

$$x \in A = \mathbb{N} \backslash f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N} \backslash g^{-1}[\{1\}]$$

מתקיים כי $g(x) \neq 1$ ולכן $g|_A$ אכן פונקציה מ A עם טווח $\mathbb{N} \backslash \{1\}$. כעת נראה ש F חח"ע ועל.

- F חח"ע: נניח $F(g_1) = F(g_2)$ וצ"ל $g_1 = g_2$. מההנחה נקבל כי $g_1|_A = g_2|_A$ ולכן לכל $x \in A$ מתקיים כי $g_1(x) = g_1|_A(x) = g_2|_A(x) = g_2(x)$. בנוסף, לכל $x \notin A$ מתקיים כי $x \in f^{-1}[\{1\}]$. מכיוון ש $g_1, g_2 \in [f]_{R_1}$ נקבל כי $(f, g_1), (f, g_2) \in R_1$ ולכן

$$x \in f^{-1}[\{1\}] = g_1^{-1}[\{1\}] = g_2^{-1}[\{1\}]$$

ולכן $g_1(x) = 1 = g_2(x)$. בסה"כ קיבלנו שלכל $x \in \mathbb{N}$ (בין אם $x \in A$ ובין אם $x \notin A$) מתקיים $g_1(x) = g_2(x)$ ולכן $g_1 = g_2$.

- F על: יהא $h \in (\mathbb{N} \backslash \{1\})^A$. נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & x \in A \\ 1 & x \in f^{-1}[\{1\}] \end{cases}$$

ומכיוון שלכל $x \in A$ מתקיים כי $h(x) \neq 1$ נקבל כי

$$g^{-1}[\{1\}] = \{x \in \mathbb{N} \mid g(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x \in f^{-1}[\{1\}]\right\} = f^{-1}[\{1\}]$$

ולכן $f^{-1}[\{1\}] = g^{-1}[\{1\}]$ ולכן $(f,g) \in R_1$ ולכן $g \in [f]_{R_1}$. בנוסף $F(g) = g|_A = h$ ולכן ל h יש מקור כנדרש.

מסקנה: $|[f]_{R_1}| = \left|(\mathbb{N} \backslash \{1\})^A\right| = |(\mathbb{N} \backslash \{1\})|^{|A|} = \aleph_0^{|A|}$. מכיוון ש $A \subseteq \mathbb{N}$ נקבל כי $|A| \leq \aleph_0$ ונוכל לחלק את התשובה הסופית כך:

- אם $|A|=\aleph_0$ נקבל כי $|[f]_{R_1}|=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$
- אחרת $|A|<\aleph_0$ ואז $|A|$סופית ונחלק:
  * אם $1\leq|A|$: אז $|[f]_{R_1}|=\aleph_0^{|A|}=\aleph_0$
  * אם $|A|=0$ נקבל כי $|[f]_{R_1}|=\aleph_0^0=1$

(ב) נקבע $n=1$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1\right|$.

פתרון: נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י מיפוי של כל $B\in P(\mathbb{N})$ לפונקציה $F(B):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$המוגדרת ע"י

$$F(B)(n)=\begin{cases}1 & n\in B\\ 2 & n\notin B\end{cases}$$

והיא מקיימת כי $F(B)^{-1}[\{1\}]=B$. כעת נראה כי $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1=\{[F(B)]_{R_1}\mid B\in P(\mathbb{N})\}$ ובנוסף לכל $B_1,B_2\in P(\mathbb{N})$ שונות מתקיים כי $[F(B_1)]_{R_1}\neq[F(B_2)]_{R_2}$. כמסקנה נקבל ש

$$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1\right|=|\{[F(B)]_{R_1}\mid B\in P(\mathbb{N})\}|=|P(\mathbb{N})|=2^{\aleph_0}=\aleph$$

וזה מסיים את התרגיל.

- טענה: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1=\{[f(B)]_{R_1}\mid B\in P(\mathbb{N})\}$ הוכחה: יהא $[f]_{R_1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R_1$ (עבור $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלשהיא). נגדיר $B=f^{-1}[\{1\}]$ ואז $F(B)$ מקיימת כי $F(B)^{-1}[\{1\}]=B=f^{-1}[\{1\}]$ ולכן $(f,F(B))\in R_1$ ולכן $[f]_{R_1}=[F(B)]_{R_1}$
- טענה: לכל $B_1,B_2\in P(\mathbb{N})$ שונות מתקיים כי $[F(B_1)]_{R_1}\neq[F(B_2)]_{R_2}$ הוכחה: יהיו $B_1,B_2\in P(\mathbb{N})$ שונות אזי $F(B_1)^{-1}[\{1\}]=B_1\neq B_2=F(B_2)^{-1}[\{1\}]$ ולכן $(F(B_1),F(B_2))\notin R_1$ ולכן $[F(B_1)]_{R_1}\neq[F(B_2)]_{R_2}$

(ג) תהי $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. הוכיחו: מתקיים $\cap_{n\in\mathbb{N}}[f]_{R_n}=\{f\}$.

פתרון: כיוון שלכל n טבעי מתקיים כי R_n יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי ובפרט $(f,f)\in R_n$ ולכן $f\in[f]_{R_n}$ ולכן $f\in\cap_{n\in\mathbb{N}}[f]_{R_n}$. זה מוכיח כי $\{f\}\subseteq\cap_{n\in\mathbb{N}}[f]_{R_n}$ כעת נוכיח את ההכלה השניה: תהא $g\in\cap_{n\in\mathbb{N}}[f]_{R_n}$ ונראה כי $f=g$. מהגדרה החיתוך נקבל שלכל n מתקיים $g\in[f]_{R_n}$ ולכן $(f,g)\in R_n$ ולכן $f^{-1}[\{n\}]=g^{-1}[\{n\}]$. יהא x טבעי ונראה ש $f(x)=g(x)$. אכן נסמן $n=f(x)$ ונקבל כי $x\in f^{-1}[\{n\}]$ ומכיוון ש $f^{-1}[\{n\}]=g^{-1}[\{n\}]$ נקבל כי $x\in g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $g(x)\in\{n\}$ ולכן $g(x)=n=f(x)$ כנדרש.

(ד) הוכיחו/הפריכו: קיימת f כך שלכל n טבעי מתקיים $\cap_{k=1}^{n}[f]_{R_k}\neq\{f\}$

פתרון: נוכיח שעבור $f=I_{\mathbb{N}}$ מתקיים שלכל n טבעי מתקיים כי $\cap_{k=1}^{n}[f]_{R_k}\neq\{f\}$. הוכחה: יהא nטבעי ונגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י

$$g(x)=\begin{cases}x & 1\leq x\leq n\\ n+1 & n+1\leq x\end{cases}$$

ואז לכל $1\leq k\leq n$ מתקיים כי

$$g^{-1}[\{k\}]=k=I_{\mathbb{N}}^{-1}[\{k\}]$$

ולכן לכל $1\leq k\leq n$ מתקיים כי $(I_{\mathbb{N}},g)\in R_k$ ולכן $g\in\cap_{k=1}^{n}[I_{\mathbb{N}}]_{R_k}$ ולכן $\{I_{\mathbb{N}},g\}\subseteq\cap_{k=1}^{n}[I_{\mathbb{N}}]_{R_k}$ ומכיוון ש $g\neq I_{\mathbb{N}}$ נקבל בפרט $\cap_{k=1}^{n}[I_{\mathbb{N}}]_{R_k}\neq\{I_{\mathbb{N}}\}$ כנדרש.

(ה) תהינה $f,g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך שלכל $2\leq n$ טבעי מתקיים כי $(f,g)\in R_n$. הוכיחו/הפריכו: $f=g$

פתרון: הוכחה: יהא x טבעי ונראה כי $f(x)=g(x)$. נסמן $n=f(x)$.
אם $2\leq n$ נקבל ש $x\in f^{-1}[\{n\}]$ ומכיוון ש $(f,g)\in R_n$ נקבל כי $f^{-1}[\{n\}]=g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $x\in g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $g(x)\in\{n\}$ ולכן $g(x)=n=f(x)$ וסיימנו.
אחרת, $n=1$ וצ"ל כי $g(x)=1$. נב"ש כי $g(x)\neq1$ אזי קיים $2\leq n$ כך ש $g(x)=n$ ולכן $x\in g^{-1}[\{n\}]$. מכיוון ש $2\leq n$ נקבל ש $(f,g)\in R_n$ ולכן $f^{-1}[\{n\}]=g^{-1}[\{n\}]$ ולכן $x\in f^{-1}[\{n\}]$ ולכן $f(x)\in\{n\}$ ולכן $f(x)=n$ אבל $f(x)=1$ ולכן $n=1$ (כי f פונקציה ובפרט חד-ערכית) סתירה.

במידה ותבחרו להגיש את חלק ב לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על חלק ב").

במידה ותבחרו לא להגיש את חלק ב לבדיקה, תקבלו עליה 14 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על חלק ב").