(88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ז מועד א'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה של מספרים ממשיים. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

1. הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
2. לכל פונקציה חד־חד ערכית ועל $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, הסידרה $\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

$2 \Leftarrow 1$: בפרט ניקח את תמורת הזהות, $\sigma(n) = n$ ונקבל $a_{\sigma(n)} = a_n$ מתכנס

$1 \Leftarrow 2$: יהי $\epsilon > 0$, מהנתון קיים N' כך שלכל $n \geq N'$ מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon$

כעת נבחר N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי $\sigma(n) \geq N'$ (זה אפשרי היות ויש מס' סופי של אינדקסים קטנים מN')

לכל $n \geq N$ מתקיים $\sigma(n) \geq N'$ ובפרט $|a_{\sigma(n)} - a| \leq \epsilon$ וסיימנו.

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln(n+1)}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n^2}{n^{5/4}}$.

ג. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$.

סעיף א

ננסה התכנסות בהחלט, נסמן $a_n := \frac{|cos(\frac{\pi n}{6})|}{|ln(n+1)|}$ וברור כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2\pi n)}{ln(12n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(12n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ננסה התכנסות בתנאי, בעזרת דיריכלה

קל להראות כי $0 \searrow \frac{1}{ln(n+1)}$ וכן $\sum cos(\frac{\pi n}{6})$ חסום בגלל המחזוריות של cos ביחס לπ.

לכן **מתכנס בתנאי**.

סעיף ב

נראה התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{sin(n^2)}{n^{\frac{5}{4}}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|sin(n^2)\right|}{n^{5/4}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < \infty$$

ולכן הטור שלנו **מתכנס בהחלט.**

סעיף ג

ננסה מבחן השורש על טור הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}} = \frac{3^{\frac{n^2}{n}}}{\sqrt[n]{n!}\cdot\sqrt[n]{n!}\cdot\sqrt[n]{n!}} = \frac{3^n}{\sqrt[n]{n!}\cdot\sqrt[n]{n!}\cdot\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{3^n}{\sqrt[n]{n^n}\cdot\sqrt[n]{n^n}\cdot\sqrt[n]{n^n}} = \frac{3^n}{n^3} \to \infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שלפי מבחן המנה $\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{3^n} = 3(\frac{n}{n+1})^3 \to 3 > 1$

אבל נשים לב בעצם ש

$$\infty \leftarrow \left(\frac{3^n}{n^3}\right)^n = \frac{3^{n^2}}{(n^n)^3} \leq \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

ולפי משפט הסנדוויץ' לאינסוף, $\frac{3^{n^2}}{(n!)^3} \to \infty$ ובפרט $(-1)^n\frac{3^{n^2}}{(n!)^3} \not\to 0$ ולכן **מתבדר.**

שאלה 3

הוכח, בעזרת ניסוח ϵ-δ, את הטענה $\frac{1}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

יהי $\epsilon > 0$ נמצא $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0 \wedge x \neq 1\} = dom(f)$ המקיים $|x-1| < \delta$ כי $|f(x) - \frac{1}{2}| < \epsilon$

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{2-(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)}\right| = \left|\frac{-\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}+1)}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}\right| = \left|\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2}\right|$$

$$< \frac{\delta}{|2x+4\sqrt{x}+2|} \leq \frac{\delta}{2}(=\epsilon)$$

לכן אם נבחר $\delta := 2\epsilon$ נקבל הדרוש

שאלה 4

תהי f פונקציה המוגדרת בכל הישר הממשי, ומקיימת $f(a+b)=f(a)+f(b)$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$. נתון גם שהפונקציה f רציפה בנקודה 0. הוכח:

א. $f(0)=0$.

ב. הפונקציה f רציפה בכל הישר הממשי.

ג. הפונקציה f רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$.

סעיף א

ניקח לפי הנתון $a=0,b=0$

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$$

ואז

$$2f(0)=f(0)$$

ולכן

$$f(0)=0$$

סעיף ב

נחשב ונראה כי לכל $a\in\mathbb{R}$ כי $lim_{h\to0}f(a+h)=f(a)$ (אחד הניסוחים השקולים)

$$lim_{h\to0}f(a+h)=lim_{h\to0}(f(a)+f(h))=f(a)+lim_{h\to0}f(h)$$

אבל מרציפות בנק' 0 מתקיים $lim_{h\to0}f(h)=f(0)=0$ ולכן

$$=f(a)+f(0)=f(a)+0=f(a)$$

סעיף ג

יהיו $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ כך ש$|a_n-b_n|\to0$ נראה כי $|f(a_n)-f(b_n)|\to0$

אבל זה ברור משום ש

$$lim_{n\to\infty}f(a_n)-f(b_n)=lim_{n\to\infty}f(a_n-b_n)$$

ומרציפות נובע כי

$$f(a_n-b_n)\to f(0)=0$$

ולכן סיימנו.

שאלה 5

הוכח את משפט קנטור, האומר שכל פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה במידה שווה בקטע זה.

<u>הוכחה</u> תהי f רציפה בקטע $[a,b]$, נניח בשלילה שf אינה רציפה במידה שווה שם.
כלומר יש בקטע סדרות $(a_n),(b_n)$ כך ש$|a_n - b_n| \to 0$ אבל $|f(a_n) - f(b_n)| \not\to 0$
ניקח $\epsilon > 0$ כך שלאינסוף ערכי n מתקיים $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$, נמספר ערכים אלה כסדרה עולה ... $m_1 < m_2 <$
ונקבל ת"ס a_{m_n}, b_{m_n} כך ש$|f(a_{m_n}) - f(b_{m_n})| \geq \epsilon$ לכל n למרות ש$|a_{m_n} - b_{m_n}| \to 0$. נסמן $c_n := a_{m_n}, d_n := b_{m_n}$
תהי c_{k_n} ת"ס של a_{m_n} מתכנסת, כלומר $c_{k_n} \to c$ (לכל סדרה חסומה, במקרה שלנו a,b, קיימת תת סדרה מתכנסת)
f רציפה בקטע הסגור ולכן מתקיים $f(c_{k_n}) \to f(c)$. כעת ניקח תת סדרה מתאימה מבחינת האינקסים של d_n, נקרא לה d_{k_n}
מתקיים כי $|c_{k_n} - d_{k_n}| \to 0$ (הרי זו ת"ס של $a_n - b_n$), וכן $d_{k_n} = c_{k_n} - (c_{k_n} - d_{k_n}) \to c - 0 = c$
כלומר קיבלנו $f(d_{k_n}) \to f(c)$ ואז $\epsilon \leq |f(c_{k_n}) - f(d_{k_n})| \to f(c) - f(c) = 0$ בסתירה.