

אלגברה לינארית 1 - תרגיל 10

הערות:

$$Rspan(A) = R(A) = \text{מרחב השורות של מטריצה } A.$$

לוקטורים ב- $Rspan(A)$ אנו מתייחסים כ-**לוקטורי עמודה**.

$$Cspan(A) = C(A) = \text{מרחב העמודות של מטריצה } A.$$

$$Null(A) = N(A) = \text{מרחב האפס של מטריצה } A.$$

(1) עבור המטריצות הבאות מצא בסיס וממד למרחבי השורות, העמודות והאפס:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) נתונה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מצא לאילו ערכי a $\text{rank}(A) = 0, 1, 2, 3$.

(3) תהי $A \in F^{n \times n}$ הוכח/הפוך:

א. $Cspan(A) = Rspan(A) \Leftrightarrow Cspan(A) \subseteq Rspan(A)$.

ב. A הפיכה $\Leftrightarrow Cspan(A) = Rspan(A)$.

ג. A הפיכה $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$.

ד. $Null(A) \subseteq Null(A^2)$.

(4) תהיינה $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times k}$ הוכח:

א. $Rspan(AB) \subseteq Rspan(B)$.

ב. $Cspan(AB) \subseteq Cspan(A)$.

ג. $Null(B) \subseteq Null(AB)$.

הדרכה: השתמשו בכפל שורה-שורה ועמודה-עמודה.

(5) יהיו $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ תתי-מרחבים המקיימים: $\dim(U_2) < \dim(U_3)$ ו- $U_1 + U_2 = U_1 + U_3$.

האם $\dim(U_1 \cap U_2)$ קטן, גדול או שווה ל- $\dim(U_1 \cap U_3)$?

(6) הוכח את גרסת משפט הממדים עבור 3 תתי-מרחבים:

$$\dim(U + V + W) = \dim(U) + \dim(V) + \dim(W) - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W)$$