

תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. כתבו את לוחות הכפל של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ושל $GL_2(\mathbb{F}_2)$. האם הן אבליות? האם הן ציקליות? תזכורת: בשדה \mathbb{F}_2 יש שני איברים $\{0, 1\}$ ופעולות החיבור והכפל הן מודולו 2.

שאלה 2. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב- T את אוסף האיברים מסדר סופי ב- G . הוכיחו כי $T \leq G$.

שאלה 3. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2 , את σ^{10} ואת $o(\sigma)$.

$$\text{א. } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$$

$$\text{ב. } \sigma = (3\ 1\ 2)(1\ 4\ 5)(2\ 3)(4\ 3\ 5) \in S_5$$

$$\text{ג. } \tau_1 = (2\ 3\ 4), \sigma = \tau_1 \circ \tau_2^2 \in S_4 \text{ ו-} \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

שאלה 4. תהי $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ חבורה אבלית סופית. יהי האיבר $b = a_1 a_2 \dots a_n$.

א. הוכיחו $b^2 = e$.

ב. הוכיחו שאם אין ב- G איבר מסדר 2, אז $b = e$.

ג. בשפת התכנות C הניחו שהיצוג של הטיפוס unsigned char הוא של 8 סיביות (כלומר משתנה מטיפוס זה הוא בין 0 לבין 255 כולל). הסבירו מה תהיה התוצאה של קטע הקוד הבא בעזרת בסעיפים הקודמים:

```
1 unsigned char b=0;
2 unsigned int i=0;
3 for (i=0; i <= 255; i++) {
4     b += i;
5 }
6 printf("%d\n", b);
```

שאלה 5. תהינה G, H חבורות. האם כל תת-חבורה K של $G \times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1 \times K_2$, כאשר K_1 תת-חבורה של G ו- K_2 תת-חבורה של H ? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

שאלה 6. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\text{supp}(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש- σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו- τ הן זרות אם $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$.

א. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

ב. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שמתחלפות.

ג. הוכיחו שאם $i \in \text{supp}(\sigma)$, אז גם $\sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$.

ד. הוכיחו שכל זוג תמורות זרות מתחלף.

שאלה 7 (רשות). הוכיחו כי אם שני מחזורים זרים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.

בהצלחה!