

תרגיל 8

15 בינואר 2013

1 קוסטים וחבורות מנה

יש לפתור 2 מתוך 3 שאלות.

1. תהי G חבורה סופית, H, K תתי-חבורות של G . נסמן $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. (שימו לב זו לא בהכרח חבורה כי H, K לא בהכרח נורמליות). הכלילו את ההוכחה של משפט האיזומורפיזם השני מתרגיל בית מס' 7 על מנת לקבל את הנוסחה $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.
2. יהי n מספר טבעי, $k \mid n$. נזכיר שחבורה הדיהדרלית D_n היא חבורה שנוצרת על ידי סיבוב r ושיקוף s המקיימים את היחסים $r^n = s^2 = e, sr = r^{-1}s$.
(א) הראו שב- D_n יש תת-חבורה איזומורפית ל- D_k . (רמז: מצאו שיכון של D_k ב- D_n).
(ב) נסמן את השיקוף ב D_n על ידי τ , ואת הסיבוב ב σ ; סיבוב ב D_k על ידי r , ואת השיקוף ב s . הראו שפונקציה $\tau^i \sigma^j \mapsto s^i r^j$ היא הומומורפיזם. מצאו את הגרעין (kernel) שלה.
(ג) הראו $D_n / \langle \sigma^k \rangle \cong D_k$. (רמז: משפט נותר = משפטי האיזומורפיזם).
(ד) הראו ש $D_{2n} / Z(D_{2n}) \cong D_n$.
3. יהי p ראשוני. הוכיחו שכל חבורה G מסדר $2p$ איזומורפית ל D_p או \mathbb{Z}_{2p} . (רמז: ניתן פשוט להכליל את ההוכחה עבור מקרה של $p = 3$ שעשינו בכיתה. כל דרך אחרת תתקבל בברכה).

2 שיכונים ומשפט קיילי

יש לפתור 2 מתוך 3 השאלות הראשונות, שאלה 4, ושאלה אחת מתוך 5 או 6.

- תזכורת:** בתרגול ראינו שאם G חבורה, $H \leq G$, X קבוצת הקוסטים השמאליים של H , אזי קיים הומומורפיזם ϕ מ G ל S_X (אוסף פונקציות חח"ע ועל מ G אל עצמה) שמתאים לכל איבר ב G את הפונקציה $\phi_g : X \rightarrow X$ המוגדרת על ידי $\phi_g(aH) = gaH$. הראנו שהגרעין $\ker \phi = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$. ראינו ש $\ker \phi$ תת-חבורה נורמלית מקסימלית של G שמוכלת ב H . לפיכך ϕ הוא שיכון של G ב S_x אם ורק אם H אינה מכילה תתי-חבורות נורמליות של G פרט ל $\{e\}$.
1. בעזרת משפט קיילי, מצאו שיכון של D_4 ב S_8 . בטאו את האיברים בתמונה כמכפלה של מחזורים.
 2. בעזרת משפט קיילי, מצאו שיכון של Q_8 (הקוטרניונים) ב- S_8 . בטאו את האיברים בתמונה כמכפלה של מחזורים.
 3. מצאו שיכון של D_4 ב S_4 . (רמז: אפשר להיעזר באינטרפרטציה גאומטרית של D_4 או להשתמש בהכללה של משפט קיילי מהתרגול).
 4. האם קיים שיכון של Q_8 ב S_4 ? (רמז: נסו לחשב סדר של כל איבר בחבורה).
 5. יהיו p, q מספרים ראשוניים. תהי G חבורה מסדר pq . הוכיחו שאם ב- G יש תת-חבורה נורמלית מסדר p , וכן תת-חבורה נורמלית מסדר q , אזי G חבורה ציקלית.
- הדרכה:** הסבירו למה מספיק להוכיח שיש לכל היותר חבורה אחת מכל סדר שמחלק את pq : נניח בשלילה שיש יותר מאחת מסדר p . אזי יש איבר מסדר p שאינו בחבורה הנורמלית מסדר p מהנתון בשאלה. עברו למנה והגיעו לסתירה.
6. תהי G חבורה מסדר pq , כאשר $p \mid q$ ו q ראשוניים, $q < p$, $q \nmid (p-1)$.
(א) בעזרת הכללה של משפט קיילי הראו של- G קיימת תת-חבורה נורמלית H מסדר p .

הדרכה: על מנת להראות שחבורה היא נורמלית, הראו שלא קיים שיכון של G ב S_X , כאשר X היא קבוצת הקוסטים השמאליים של החבורה הנורמלית H . לכן, לפי המשפט שהזכרנו, קיימת ב H תת-חבורה נורמלית של G ששונה מ $\{e\}$. משיקולי סדר, חבורה זו יכולה להיות רק H בעצמה.

(ב) נניח כי h הוא היוצר של H . יהי $k \notin H$ נתון. אזי $khk^{-1} \in H$. נסמן $khk^{-1} = h^m$. בעזרת הצמדות חוזרות, הראו כי $m^q \equiv 1 \pmod{p}$.

(ג) בעזרת התכונות של \mathbb{Z}_p^* , הראו שאם $m^q \equiv 1 \pmod{p}$ אז הסדר של m מחלק את $p-1$ ואת q .

(ד) הסיקו $m=1$, ולכן G אבלית.

(ה) הראו ש G ציקלית.

3 הצמדה, נוסחת המחלקה ומשפט קושי

יש לעשות את השאלות 1, 3 ואחת מתוך 2, 4 ו 5.

1. הוכיחו שכל חבורה מסדר p^2 אבלית.

הדרכה: היעזרו בכך שבחבורה מסדר p^n המרכז איננו החבורה הטריבויאלית. טענה זו הוכחה בשיעור התרגיל האחרון. כמו-כן היעזרו במשפט: תהי חבורה G כך ש $G/Z(G)$ ציקלית, אזי G אבלית.

תזכורת:

(א) הראנו שב S_n שתי תמורות צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים.

(ב) יהי $g \in G$. הגדרנו את המרכז של g ב G , $C_G(g) := \{x \in G : xg = gx\}$. נסמן את מחלקת הצמידות של $g \in G$ על ידי $conj(g)$ או C_g (אלו סימונים שונים למחלקת צמידות). מתקיים $|conj(g)||C_G(g)| = |G|$.

2. הראו ישירות ש K_4 היא תת-חבורה נורמלית של S_4 .

3. יהיו $r \leq n$ טבעיים.

(א) הוכח שקיימים $\frac{1}{r} \frac{n!}{(n-r)!}$ מחזורים שונים באורך r .

(ב) בעזרת הסעיף הקודם, חשב את גודל מחלקת הצמידות של $(1 \dots r)$ ב S_n .

(ג) הראה שכל איבר במרכז של $(1 \dots r)$ הוא מן הצורה $(1 \dots r)^i \tau$ כאשר $0 \leq i \leq r-1$, ו τ היא תמורה שקובעת (=איננה מזיזה) את $1, \dots, r$.

4. תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. הוכח/הפוך: אם g ו h צמודים ב G אזי הם צמודים ב N .

5. מצא את כל מחלקות הצמידות של A_4 .