אביב תשע"ד

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 5: חוקי שימור ומשוואות המילטון

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r)=-GMm/r$ נתון ע"י
$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r)$

   (א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.
   האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת ? מדוע ?

   (ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

   (ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב $x\to x+\epsilon y,\ y\to y-\epsilon x$.

   (ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו ?

2. הוכיחו כי שני לגראנגי'אנים $\mathcal{L},\mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונ-קציה של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q},t)$, כלומר $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+df(\vec{q},t)/dt$, שומרים על משוואות התנועה (רמז: הוכיחו כי $\delta S'=0$, כאשר $S'=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}'dt$ הפעולה המתאימה ל $\mathcal{L}'$ וידוע כי $\delta S=0$).

$$\delta S'=\delta S+\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{df}{dt}dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{df}{dt}dt=\delta[f(\vec{q}(t_2),t_2)-f(\vec{q}(t_1),t_1)]=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial q_k}(\eta_k(t_2)-\eta_k(t_1))=0,\ \ k=1,2,...,n$$

עבור מסלולים $q_k^\alpha(t)=q_k(t)+\alpha\eta_k(t)$, **כך ש** $\eta_k(t_1)=\eta_k(t_2)=0$.

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית הנעה במהירות קבועה $\vec{v}_0=v_0\hat{y}$ ביחס למעבדה.

   (א) קבלו את הלגראנג'יאן במעלית $\mathcal{L}$ ובמעבדה $\mathcal{L}'$ (רשמו את הפוטנציאלים ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי
   $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+df(\theta,t)/dt$, כאשר
   $f(\theta,t)=-mv_0\ell\cos\theta-\frac{1}{2}mgv_0t^2+\frac{1}{2}mv_0^2t$.

הלגראנג'יאן במעלית $\mathcal{L}$ הינו

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta).$$

נסמן כעת את קואורדינטות המסה m במערכת המעבדה ב $x = \ell\sin\theta,\ y = v_0 t + \ell(1-\cos\theta)$ ונקבל את הלגראנג'יאן במעבדה $\mathcal{L}'$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + v_0^2 + 2v_0\ell\dot{\theta}\sin\theta) -$$

$$-mg\ell(1-\cos\theta) - mgv_0 t = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}f(\theta,t),$$

כאשר

$$f(\theta,t) = -mv_0\ell\cos\theta - \frac{1}{2}mgv_0t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 t$$

.

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור $\mathcal{L}$ ו $\mathcal{L}'$ וודאו כי הן אכן זהות.
משוואת התנועה עבור $\mathcal{L}$ הינה

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta,$$

ועבור $\mathcal{L}'$ נקבל

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mv_0\ell\dot{\theta}\cos\theta = -mg\ell\sin\theta + mv_0\ell\dot{\theta}\cos\theta$$

ושתי המשוואות אכן זהות.

4. הלגראנג'יאן של חלקיק חפשי בקורדינטות פאראבוליות (ξ,η,ϕ) נתון ע"י
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\xi^2+\eta^2)(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$

(א) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ, p_η, p_ϕ).

(ב) מצאו את ההמילטוניאן.

5. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות
$f(q_1,...,q_n;p_1...,p_n;t),\ g(q_1,..,.q_n;p_1...,p_n;t)$ להיות
$\{f,g\} = \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$.

(א) הוכיחו כי $\frac{df}{dt} = \{f,\mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, כאשר $\mathcal{H}$ ההמילטוניאן של המערכת

(ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה שמצאתם ב 1ד מקיימת $\{f, \mathcal{H}\} = 0$

(ג) הכלילו את תוצאת 5ב לפוטנציאל כלשהוא מהצורה $U(x, y) = U(x^2 + y^2)$

6. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

(א) אנטיסימטריות $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ולכן $\{f, f\} = 0$

(ב) $\{f, const\} = 0$

(ג) לינאריות $\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\}$

(ד) זהות יעקובי $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

(ה) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$

7. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. נציג כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right),\ a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$.

(א) בטאו את $\mathcal{H}$ באמצעות a, a^*.

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\},\ \{a, \mathcal{H}\},\ \{a^*, \mathcal{H}\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 7ד. השוו לחישוב הישיר.