

# תרגיל 8

להגשה עד 23.12.15

יהי  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  מ"ח.  
נסמן:  $L^p(\mu) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$  ו:  $l^p = L^p(\mathbb{N})$ .

## שאלה 1

נניח  $X$  מרחב טופולוגי, ו-  $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$ , ולכל  $V$  פתוחה לא ריקה מתקיים  $\mu(V) > 0$ .  
הוכיחו כי אם  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות כך ש  $f = g$  כב"מ- $\mu$  אז  $f(x) = g(x)$  לכל  $x \in X$ ,  
והסיקו מכך כי לכל  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה מתקיים:

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \mid x \in X\}$$

## שאלה 2

1. נניח כי  $\mu(X) < \infty$ . הוכיחו כי אם  $1 \leq r < p < \infty$  אזי  $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$  ולכל  $f \in L^p(\mu)$  מתקיים:

$$\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$$

2. הוכיחו כי אם  $r < p$  אזי  $l^r \subsetneq l^p$ .

## שאלה 3

תהי  $(f_n)_n$  סדרת פונקציות ממשיות מדידות- $\mathbb{A}$  על  $X$  המתכנסת כב"מ לפונקציה  $f$ .  
נניח שעבור  $p \in [1, \infty)$  קיימת  $g \in L^p(\mu)$  כך שלכל  $n: |f_n| \leq g$  (כב"מ). הוכיחו כי  $f, f_n \in L^p(\mu)$ ,  
וכן כי  $f_n \rightarrow f$  ב  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ .

## שאלה 4

יהיו  $(X, \mathbb{A})$ ,  $(Y, \mathbb{S})$  מרחבים מדידים. ותהי  $h: X \rightarrow Y$  פונקציה מדידה  $(\mathbb{A}, \mathbb{S})$ .  
לכל מידה חיובית  $\mu$  על  $\mathbb{A}$  נגדיר לכל  $E \in \mathbb{S}$ :

$$\nu(E) := \mu(h^{-1}[E])$$

הוכיחו כי:

1.  $\nu$  מהווה מידה חיובית על  $\mathbb{S}$ .

2. אם  $f: Y \rightarrow [0, \infty]$  מדידה- $\mathbb{S}$ , אזי  $f \circ h$  מדידה- $\mathbb{A}$  ומתקיים:

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ h d\mu$$

3. אם  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  מדידה- $\mathbb{S}$ , אזי  $f \circ h$  מדידה- $\mathbb{A}$ .

4.  $f \in L^p(\nu)$  עבור  $p \in [1, \infty)$  אם  $f \circ h \in L^p(\mu)$ . ובמקרה זה יתקיים שההעתקה  $f \mapsto f \circ h$  שומרת נורמה, ועבור  $p = 1$ , העתקה זו מכבדת אינטגרציה, כלומר:

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ h d\mu$$

## שאלה 5

תהי

$$.S := \{s \mid s: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is simple (measurable), and } \mu(\{x \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$$

הוכיחו כי :

1.  $S$  מרחב לינארי מעל  $\mathbb{R}$ .

2. לכל  $p \in [1, \infty)$ :

$$.S = \{t \mid t: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ is simple, and } t \in L^p(\mu)\}$$

3. לכל  $p \in [1, \infty)$ ,  $S$  צפופה ב  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ .

**בהנאה (:**