

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 5: חוקי שימור ומשוואות המילטון

1. הלגרנגיאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.

האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנגיאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי

תחת טרנספורמצית סיבוב $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. הוכיחו כי שני לגראנגיאנים $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונ-

קציה של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q}, t)$, כלומר $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q}, t)/dt$, שומרים

על משוואות התנועה (רמז: הוכיחו כי $\delta S' = 0$, כאשר $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$ הפעולה המתאימה ל \mathcal{L}' וידוע כי $\delta S = 0$).

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית

הנעה במהירות קבועה $\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$ ביחס למעבדה.

(א) קבלו את הלגרנגיאן במעלית \mathcal{L} ובמעבדה \mathcal{L}' (רשמו את הפוטנציאלים

ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta, t)/dt$$

$$f(\theta, t) = -mv_0 \ell \cos \theta - \frac{1}{2}mgv_0 t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 t$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור \mathcal{L} ו \mathcal{L}' וודאו כי הן אכן זהות.

4. הלגרנגיאן של חלקיק חפשי בקורדינטות פאראבוליות (ξ, η, ϕ) נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$$

(א) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ, p_η, p_ϕ) .

(ב) מצאו את ההמילטוניאן.

5. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות

$$f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), \quad g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$$

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- (א) הוכיחו כי $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, כאשר \mathcal{H} ההמילטוניאן של המערכת
- (ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה שמצאתם ב 1d מקיימת $\{f, \mathcal{H}\} = 0$
- (ג) הכלילו את תוצאת 5b לפוטנציאל כלשהוא מהצורה
- $$U(x, y) = U(x^2 + y^2)$$

6. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

- (א) אנטיסימטריות $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ולכן $\{f, f\} = 0$
- (ב) $\{f, const\} = 0$
- (ג) לינאריות $\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha \{f, g\} + \beta \{f, h\}$
- (ד) זהות יעקובי $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$
- (ה) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$

7. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right), \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right)$$

- (א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .
- (ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\}$, $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a^*, \mathcal{H}\}$.
- (ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.
- (ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.
- (ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 7d. השוו לחישוב הישיר.