פתרון מבחן מועד ב' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 07/03/21

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x-2)}{\ln(e^x+1)\ln(e^x+x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x-2)}{\ln(e^x+1)\ln(e^x+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(e^x+x)}\cdot\frac{e^x-2}{\ln(e^x+1)}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\ln(2)}=-\frac{1}{2\ln(2)}$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(e^x+x)}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x+x}}=\frac{1}{2}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{4^n+3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt{4}\right)^n}\cdot\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}=2\cdot 1^0=2$$

.2

א. חשבו את $\int \sin(2x)\, e^x\, dx$.

$$\int \sin(2x)\, e^x dx = \begin{Bmatrix} g' = e^x & f = \sin(2x) \\ g = e^x & f' = 2\cos(2x) \end{Bmatrix} = e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\, dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} g' = e^x & f = \cos(2x) \\ g = e^x & f' = -2\sin(2x) \end{Bmatrix} = e^x \sin(2x) - 2\left[e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)\, dx\right]$$

לכן

$$\int \sin(2x)\, e^x dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\, dx$$

נעביר אגף ונחלק ב5 ונקבל סה"כ

$$\int \sin(2x)\, e^x dx = \frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) + C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_4^\infty \frac{1}{x^2-2x-3}\, dx$.

ראשית נבצע פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)$$

ולכן

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}\, dx = \frac{1}{4}(\ln|x-3| - \ln|x+1|) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$$

ולכן

$$\int_4^\infty \frac{1}{x^2-2x-3}\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-3}{t+1}\right| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{4-3}{4+1}\right| = \frac{1}{4}\ln(1) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\ln(5)}{4}$$

.3 נביט בפונקציה $h(x) = 2x^3 - 6x^2 - a(3x^2 - 12x)$

א. לכל ערך של הפרמטר $a \in \mathbb{R}$ מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה h.

$$h'(x) = 6x^2 - 12x - a(6x - 12) = 6x(x-2) - 6a(x-2) = 6(x-a)(x-2)$$

זו פרבולה מחייכת עם שורש אחד או שני שורשים.

אם $a = 2$ אזי $h'(x) = 6(x-2)^2 \geq 0$ והפונקציה עולה בכל הממשיים.

אם $a < 2$ אז $h'(x) \leq 0$ אם ורק אם $x \in [a, 2]$ ובתחום זה הפונקציה יורדת, ובתחומים $(-\infty, a], [2, \infty)$ היא עולה.

באופן דומה, אם $a > 2$ הפונקציה יורדת בתחום $[2, a]$ ועולה בתחומים $(-\infty, 2], [a, \infty)$

ב. לכל ערך של הפרמטר $a \in \mathbb{R}$ מצאו כמה פתרונות ישנם למשוואה $2x^3 - 6x^2 = a(3x^2 - 12x)$, והוכיחו תשובתכם.

ראשית נעביר אגף, ונקבל את הפונקציה h מסעיף קודם, ואנחנו מעוניינים לדעת כמה נקודות חיתוך יש לה עם הציר לכל ערך של a

נשים לב כי

$$h(x) = x^3 \left(2 - \frac{6}{x} - \frac{3a}{x} + \frac{12a}{x^2}\right)$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$$

כעת נחלק למקרים.

עבור $a = 2$ הפונקציה עולה בכל הממשיים ולכן יש לה נק' חיתוך אחת לכל היותר.

לפי חישוב הגבולות יש נקודה מעל הציר, ונקודה מתחת לציר, וכיוון שהפונקציה היא פולינום ולכן רציפה, לפי משפט ערך הביניים יש לה חיתוך עם הציר, וסה"כ <u>בדיוק חיתוך אחד</u>.

אם $a < 2$ ראינו בסעיף א' שהפונקציה עולה עד $x = a$ ואז יורדת עד $x = 2$ ואז עולה. יחד עם הגבולות, אנחנו יודעים שהפונקציה מתחת לציר בנקודה כלשהי שקטנה מa ומעל הציר בנקודה כלשהי שגדולה מ2.

לכן לפי ערכי הפונקציה בנקודות $x = a, 2$ נוכל לקבוע בדיוק כמה חיתוכים יש לה עם הציר, הרי בכל תחום מונוטוניות יש לכל היותר חיתוך אחד.

$$h(a) = 2a^3 - 6a^2 - a(3a^2 - 12a) = -a^3 + 6a^2 = a^2(6 - a)$$

כיוון שאנו עוסקים במקרה בו $a < 2$, אם $a \neq 0$ נובע כי $h(a) > 0$ ולכן לפי ערך הביניים ותחום העלייה יש חיתוך יחיד בתחום $(-\infty, a]$.

אם $a = 0$ הפונקציה עולה עד ל$x = a$ שם היא נושקת לציר ואז יורדת עד ל$h(2) < 0$ ולאחר מכן לפי ערך הביניים יש חיתוך נוסף (יחיד בגלל המונוטוניות. במקרה זה נקבל סה"כ <u>בדיוק שני חיתוכים</u>.

$$h(2) = 16 - 24 - a(12 - 24) = -8 + 12a = 4(3a - 2)$$

אם $a = \frac{2}{3}$ אזי $h(2) = 0$ והפונקציה יורדת עד עליה ועולה אחריה, ולכן סה"כ נקבל <u>בדיוק שני חיתוכים</u>.

אם $a < \frac{2}{3}$ אזי $0 \neq a$ $h(2) < 0$ ולכן נקבל חיתוך בקטע $(a, 2)$ ולאחריו חיתוך נוסף בקטע $(2, \infty)$ וסה"כ <u>בדיוק שלושה חיתוכים.</u>

אם $\frac{2}{3} < a < 2$ אזי $h(2) > 0$ ולכן הפונקציה יורדת מ$h(a)$ עד $h(2) < 0$ ואז עולה, ואין חיתוך נוסף, וסה"כ <u>בדיוק חיתוך יחיד</u>.

כעת נטפל במקרה בו $a > 2$.

במקרה זה, $h(2) > 0$ ולכן יש חיתוך יחיד בקטע $(-\infty, 2)$ (טיעונים כמו במקרים הקודמים, לא אחזור לרשום כל פעם).

אם $2 < a < 6$ אזי גם $h(a) > 0$ ולכן הפונקציה יורדת מ$h(2)$ עד $h(a) > 0$ ואז עולה, ואין חיתוך נוסף. סה"כ בדיוק חיתוך יחיד.

אם $a = 6$ אזי $h(a) = 0$ ולכן הפונקציה נושקת בנקודה זו לציר (יורדת עד אליו ועולה לאחריו), וסה"כ יש בדיוק שני חיתוכים.

ולבסוף, אם $a > 6$ אז $h(a) < 0$ ולכן לפי ערך הביניים יש חיתוך בכל אחת מתחומי המונוטוניות וסה"כ בדיוק 3 חיתוכים.

נסכם את כמות הפתרונות לפי כל אחד מן התחומים של a:

חיתוך יחיד: $a \in \left(\frac{2}{3}, 6\right)$

שני חיתוכים: $a = 0, \frac{2}{3}, 6$

שלושה חיתוכים: $a \in (-\infty, 0), \left(0, \frac{2}{3}\right), (6, \infty)$

דרך II:

ברור ש$x = 0$ מקיים את המשוואה לכל a. לכן נחפש פתרונות עבור $x \neq 0$, ונחלק ראשית בx.

$$2x^2 - 6x - 3ax + 12a = 0$$

זו סה"כ פרבולה וכמות הפתרונות שלה נקבעת ע"י סימן הדיסקרימיננטה

$$(3 + 6a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12a$$

ולכן יש לנו אפס, אחד או שני פתרונות נוספים לפתרון $x = 0$, פרט למקרה בו $a = 0$ ואז $x = 0$ לא צריך להספר פעמיים.

סה"כ כמובן נגיד לאותם הפתרונות (נשאיר את ההמשך כתרגיל).

4. תהי f פונקציה רציפה בכל הממשיים המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $f(x) > 0$.

א. הוכיחו/הפריכו: קיים $M > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) > M$.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x) = e^x$ החיובית לכל x.

כיוון ש $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, לכל $M > 0$ קיימת נקודה על הציר שמשמאלה $f(x) < M$.

לכן לא קיים M כזה עבור הפונקציה שהראנו.

ב. הוכיחו/הפריכו: קיים $M > 0$ כך שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים כי $f(x) > M$.

הוכחה:

לפי משפט ויירשטראס השני, הפונקציה מקבלת מינימום בנקודה $c \in [0,1]$ כיוון שהיא רציפה בקטע סגור.

לכן לכל $x \in [0,1]$ מתקיים כי $f(x) \geq f(c) > 0$

נבחר $M = \frac{f(c)}{2}$ ונקבל כי לכל $x \in [0,1]$ מתקיים כי $f(x) \geq f(c) > \frac{f(c)}{2} = M$.

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = a_n + \sqrt{|1 - a_n|}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
   א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{|1 - a_n|} \geq 0$$

   ב. לכל ערך של האיבר הראשון $a_1 \in \mathbb{R}$, מצאו את גבול הסדרה.

כיוון שהסדרה מונוטונית עולה, או שהיא חסומה מלעיל ומתכנסת למספר סופי, או שהיא אינה חסומה ושואפת לאינסוף.

<u>אם</u> היא חסומה מלעיל, אזי $a_n \to L \in \mathbb{R}$ ולכן $a_{n+1} \to L$. נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה ונקבל כי

$$L = L + \sqrt{|1 - L|}$$

לכן $\sqrt{|1 - L|} = 0$ ולכן $L = 1$.

מכאן, אם $a_1 > 1$ כיוון שהסדרה עולה הגבול שלה גדול או שווה a_1 ולכן לא יכול להיות 1. כלומר, במקרה זה לא ייתכן כי הסדרה חסומה ולכן היא שואפת לאינסוף.

אם $a_1 = 1$, מקבלים את הסדרה הקבועה 1 (ניתן בקלות להוכיח זאת באינדוקציה) ולכן היא שואפת ל1.

אם $0 < a_1 < 1$ נוכיח כי $a_2 > 1$ ולכן הגבול חייב להיות לפחות a_2 ולא יכול להיות 1, ולכן הסדרה שואפת לאינסוף.

צ"ל כי

$$a_2 = a_1 + \sqrt{|1 - a_1|} > 1$$

זה שקול ל

$$\sqrt{1 - a_1} > 1 - a_1$$

$$1 - a_1 > (1 - a_1)^2$$

וזה נכון כיוון ש $0 < 1 - a_1 < 1$.

לבסוף, נניח כי $a_1 \leq 0$. אם הסדרה חסומה, היא שואפת ל1 מלמטה (הרי היא עולה). לכן החל משלב מסויים כל איבריה יהיו בתחום $[0,1)$. ראינו כי בתחום $(0,1)$ לכל איבר בתחום זה, האיבר הבא גדול ממש מ1, בסתירה.

נבדוק מתי נקבל בדיוק 1

$$1 = a_n + \sqrt{|1 - a_n|}$$

$$1-a_n=\sqrt{|1-a_n|}$$

נעלה בריבוע

$$|1-a_n|^2=|1-a_n|$$

לכן $|1-a_n|=1$ או $|1-a_n|=0$. אנחנו מקבלים 3 פתרונות $a_n=0,1,2$ כאשר הפתרון 2 נפסל כי $1-2<0$ (הוא התווסף כאשר העלינו בריבוע.)

לכן אם איבר כלשהו שווה לאפס, האיבר הבא הוא 1 ואז הסדרה היא הסדרה הקבועה 1 ושואפת ל1.

האם ייתכן שמתישהו מתקבל האיבר 0?

$$0=a_n+\sqrt{|1-a_n|}$$

$$-a_n=\sqrt{|1-a_n|}$$

כמובן שפתרון יתאפשר רק אם $a_n\le 0$ ולכן $|1-a_n|=1-a_n$

נעלה בריבוע

$$a_n^2=1-a_n$$

$$a_n^2+a_n+1=0$$

ולמשוואה זו אין פתרונות.

לכן גם בתחום זה הסדרה שואפת לאינסוף.

סה"כ הסדרה שואפת לאינסוף לכל $a_1\neq 0,1$ ושואפת ל1 עבור $a_1=0,1$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\to\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

המעבר נכון כיוון שהפונקציה $f(x)=x^4$ רציפה בקטע $[0,1]$ והראנו כי a_n היא סדרת סכומי הרימן שלה ולפי משפט הם שואפים לאינטגל בקטע.

ב. מצאו מספר a המקיים $\sin(1) - \frac{1}{1000} < a < \sin(1)$

נחפש a שהוא קירוב טיילור של $\sin(1)$.

השארית היא

$$R = \sin(1) - a$$

כלומר

$$a = \sin(1) - R$$

ואנו רוצים כי

$$0 < R < \frac{1}{1000}$$

נפתח את הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ סביב הנקודה המצוייה 0 ונקרב אותה בנקודה הרצוייה 1.

עבור $n = 7$ נקבל כי קיימת $0 < c < 1$ כך ש

$$R_5 = \frac{f^{(8)}(c)}{8!} \cdot 1^8 = \frac{\sin(c)}{8!}$$

כיוון ש $0 < c < 1$ מתקיים $\sin(c) > 0$ הרי sin חיובית בתחום זה.

(אפשר להשתמש בזה, ואפשר גם לעשות צעד נוסף ולהסיק את זה מחישובים דומים למה שעשינו).

וכמובן ש $\sin(c) \leq 1$ ולכן סה"כ

$$0 < R_5 \leq \frac{1}{8!} < \frac{1}{1000}$$

כפי שרצינו. לכן התשובה היא

$$a = P_7(\sin(x), 0, 1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$