

הגדרות ומשפטים למבחן באנליזה מודרנית 1

הגדרות: המידה החיצונית של לבג, קבוצות מדידות לבג, קבוצות בורל, פונקציות מדידות ואינטגרביליות, σ -אלגברה, מידה כללית, רציפות בהחלט של פונקציות ושל מידות, מידת מכפלה, השתנות חסומה, מרחבים נורמים, מרחבי בנך, מרחבי L^p כולל L^∞ ביחס למידה כלשהי, מרחבי הלברט, מידה סינגולרית, מידה σ -סופית.

משפטים (רק לצטט ולהבין, בלי להוכיח):

משפט ההתכנסות המונוטונית, הנשלטת, והחסומה, למת פאטו, משפט הגזירה של לבג, אפיון השתנות חסומה, הכללת "המשפט היסודי של חשבון אינטגרלי", אפיון קבוצות מדידות $u \times v$, משפטי פוביני וטונלי, אי-שוויונים של הולדור ומינקובסקי, משפט ההצגה של ריס (במרחב הלברט), משפט רדון-ניקודים, משפט הפירוק של לבג.

תרגילים למבחן [ישתנה בימים הקרובים – יש תרגילים שלא פתרנו].

1. כל קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R} שווה לאיחוד זר בן מניה של קטעים פתוחים.
2. הגדירו את קבוצת קנטור והוכיחו שהיא לא בת מנייה ומכל מקום מידת לבג שלה אפס.
3. האם הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ בעלת השתנות חסומה ב- $[0,1]$? הצדיקו.
4. תנאי ליפשיץ $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ גורר רציפות בהחלט.
5. פונקציה f רציפה בהחלט בקטע $[a, b]$ מקיימת תנאי ליפשיץ אם ורק אם $|f'(x)|$ חסומה ב- $[a, b]$.
6. כל פונקציה בעלת השתנות חסומה על \mathbb{R} מדידה לבג.
7. אם $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ (עם מידת לבג) הוכיחו שגם הקונבולוציה $f * g$ שייכת ל- $L^1(\mathbb{R})$.