תרגול 2

תזכורת:

תהי X קבוצה כלשהי, $S \subseteq P\left(X\right)$ תקרא רינג אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

i. $\varnothing \in S$

ii. $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$

iii. $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$

ואם מתקיים גם כי $X \in S$ אזי S הינה אלגברה.

לעומת זאת אם S מקיימת את

i. $\varnothing \in S$

ii. $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$

iii. $A, B \in S \Rightarrow A / B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ כאשר C_i הינן קבוצות זרות ב S .

אזי היא תקרא סמי רינג. קל לראות כי אם S הינה רינג אזי היא סמי רינג.

דוגמא: תהי $S = \left\{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\right\} \cup \left\{\varnothing\right\}$ קבוצת כל הקטעים הפתוחים משמאל וסגורים מימין.
אזי קל לבדוק כי S הינה סמי רינג שכן היא סגורה לחיתוך והמשלים של כל קטע הינו איחוד זר וסופי של קטעים השייכים ל S . לעומת זאת קל גם לראות כי S איננה רינג שכן $(1,2] \cup (3,5] \notin S$.

בהינתן שיש לנו סמי רינג S ומידה $\mu : S \to [0, \infty]$ (יש להבין למה היא נקראת מידה) ניתן להגדיר מידה $\mu^* : \sigma\left(S\right) \to [0, \infty]$ על הסיגמא אלגברה שנוצרת מ S באופן הבא:

לכל $E \in P\left(X\right)$ נגדיר את המידה החיצונית

$$\mu^*\left(I\right) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right) | \bigcup_{\text{some } A_n \in S} A_n \supset E\right\}.$$

כלומר אנו מודדים את כל הכיסויים של הקבוצה E עם קבוצות ב S ולוקחים את הכיסוי "הקטן ביותר". שימו לב כי הגדרנו פונקציה על כל $P\left(X\right)$. בשלב השני אנחנו מראים כי אוסף כל הקבוצות המקיימות $M^* = \left\{A : \mu^*\left(E\right) = \mu^*\left(A \cap E\right) + \mu^*\left(A \cap E^c\right) \ \forall E \in P\left(X\right)\right\}$ הינו סיגמא אלגברה וכי הצימצום של μ^* על M הינה מידה.

תכונות בסיסיות של מידה חיצונית:

i. $\mu^*\left(\varnothing\right) = 0$

ii. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$

iii. $\mu^*\left(\bigcup A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (סב אדיטיביות)

דוגמא: אם נסתכל על הסמי רינג $S = \{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{\varnothing\}$ עם המידה $m((a,b]) = b-a$ נקבל כי $m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \mid \bigcup_{some\ I_n \in S} I_n \supset E\right\}$ הינה מידה חיצונית וכי הצמצום של m^* על M^* נקרא מידת לבג ו M^* סיגמא אלגברה לבג.

1) הוכיחו כי אם $m^*(A) = 0$ אזי $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

פתרון:

$\ge$: $B \subseteq A \cup B$ ולכן $m^*(A \cup B) \ge m^*(B)$.

$\le$: עפ"י ה sub-additivity property מתקיים

$$m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B)$$
$$\Rightarrow m^*(A \cup B) \le m^*(B)$$

2) תהי A קבוצת האי רציונאליים באינטרוול $[0,1]$. הוכח כי $m^*(A) = 1$.

פתרון:

המידה החיצונית של כל נקודה ב $\mathbb{R}$ היא 0 מכיוון שאם $x \in \mathbb{R}$ נקודה, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים הקטע $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ שאורכו 2ε ומכיל את x , לכן :

לכל $m^*(x) \le 2\varepsilon \Rightarrow m^*(x) = 0$.

נסמן ב B את קבוצת הראציונאליים ב $[0,1]$, B היא בת מנייה ולכן נוכל לרשום $B = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

כמו כן

$$m^*(B) \le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(x_i) = 0 \Rightarrow m^*(B) = 0$$

עפ"י התרגיל הקודם נובע כי $m^*(A) = m^*(A \cup B) = m^*([0,1]) = 1$

מש"ל

3) תהי B קבוצת הרציונאליים ב $[0,1]$ ותהי $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ קבוצה סופית של קטעים פתוחים שמכסה את B. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n} m^*(I_k) \ge 1$.

פתרון:

$$1=m^*([0,1])=m^*\left(\overline{A}\right)\leq m^*\left(\overline{\bigcup I_n}\right)=m^*\left(\bigcup \overline{I_n}\right)\leq \sum m^*\left(\overline{I_n}\right)=\sum l\left(\overline{I_n}\right)$$

מש"ל

שימו לב כי השיוויון $\overline{\bigcup I_n}=\bigcup \overline{I_n}$ מתקיים כי קבוצת הקטעים $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ הינה סופית.

אם ניקח לדוגמא את הסדרה $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $I_k=\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)$ נקבל כי

$$\overline{\bigcup I_k}=\overline{\bigcup\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)}=\overline{(0,1)}=[0,1]$$

לעומת זאת

$$\bigcup \overline{I_k}=\bigcup\left[\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right]=(0,1)$$

תרגיל : לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו $a,b\in\mathbb{R}$ מגדירים $aE+b:=\{ax+b:x\in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x\mapsto ax+b$). הוכיחו: $m^*(aE+b)=|a|m^*(E)$.

פתרון: הזזה ראיתם בהרצאה. לכן נראה רק את המקרה $m^*(aE)=|a|m^*(E)$.

המקרה בו $a=0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE=0$. נוכיח ל $a\neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE .

הוכחה:

$\Leftarrow$: הפונקציה $x\mapsto ax$ פתוחה (ההופכית שלה רציפה) ולכן aO קבוצה פתוחה. מצד שני $aO=a(E\cap O)\cup(O/E)=a\left(E\cup(O/E)\right)=aE\cup a(O/E)$, ומכאן $aE\subseteq aO$.ולכן aO כיסוי פתוח של aE .

$\Rightarrow$: באותו אופן ע"י $x\mapsto\frac{1}{a}x$. מש"ל.

כעת, נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} aI_n=a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$ ומכאן ש

$$m*(aE)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ is an interval}\}$$
$$=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(aI_n) \mid E\subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} aI_n\right), I_n \text{ is an interval}\}$$
$$=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |a| l(I_n) \mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}$$
$$=|a|\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}$$
$$=|a|\mathrm{m}*(E)$$

מש"ל.

<u>**תרגיל:**</u> תהי E קבוצה מדידה לבג, $a,b\in\mathbb{R}$ קבועים, הוכיחו כי הקבוצה $aE+b$ מדידה גם היא.

<u>**פתרון:**</u> תראו בהרצאה שהזזה שומרת על מדידות, ולכן נניח בה"כ $b=0$. נחלק לשני מקרים:

<u>$a=0$:</u> במקרה זה הקבוצה $aE=\{0\}$ היא נקודון, ובוודאי מדידה.

<u>$a\neq 0$:</u> נוכיח שתי טענות עזר, לכל $A,B\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $a\in\mathbb{R}$:

א. $(aA)^c=aA^c$

ב. $a(A\cap B)=(aA)\cap(aB)$

<u>**הוכחה:**</u>

א.

$$x\in(aA)^c \Leftrightarrow x\notin aA \Leftrightarrow \frac{x}{a}\notin A \Leftrightarrow \frac{x}{a}\in A^c \Leftrightarrow x\in aA^c$$

ב.

$$x\in a(A\cap B)\Leftrightarrow \frac{x}{a}\in A\cap B \Leftrightarrow \frac{x}{a}\in A \,\&\, \frac{x}{a}\in B \Leftrightarrow x\in aA \,\&\, x\in aB \Leftrightarrow x\in(aA)\cap(aB)$$

המדידות של E נותנת $m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$ לכל $A\subseteq\mathbb{R}$. נכפול שוויון זה ב $|a|$

$$|a|m^*(A)=|a|m^*(A\cap E)+|a|m^*(A\cap E^c)$$

$$m^*(aA)=m^*(a(A\cap E))+m^*(a(A\cap E^c))$$

$$m^*(aA) = m^*(aA \cap aE) + m^*\left(aA \cap (aE)^c\right)$$