# תרגול 6

## תרגול עם אורן (26/07/2016)

**נתון:** מטריצה $A$ בלי שגיאה. נתון ווקטור $b$ "בערך" (שגיאה $\Delta b$).

**נפתור** - $Ax = b$. מה השגיאה ב – $x$?

**דוגמה:**

נעבוד עם כמה נורמות במקביל. נתון –

$$b = \binom{3}{4}, \Delta b = \binom{0.5}{1.2}$$

נחשב נורמות:

$$\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{1.7}{7}\ ,\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} = \frac{1.3}{5}$$

עוד נתון –

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

וגם כאן נחשב נורמות –

$$\|A\|_1 = 18\ , \|A\|_2 = 15$$

ומהנוסחה הבאה נוכל לחשב את השגיאה ב – $x$(עבור כל נורמה):

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} * \underbrace{C_A}_{\text{מספר מצב}} \geq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

## דירוג מטריצות (פירוק $LU$)

עבור מערכת נתונה $Mx = b$ נבצע –

$$Mx = b\ \ <=>_{\text{פירוק } LU}\ LUx = b\ \ <=> \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

כאשר $U$ מטריצה משולשית עליונה ו – $L$ מטריצה משולשית תחתונה.

# <u>תרגול 6</u>

## <u>שיטת $PALU$</u>

באופן כללי –

$$Mx = b \iff P^{-1}LUx = b \iff LUx = Pb \iff \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

**<u>דוגמה:</u>**

נבצע פירוק $PALU$ עם $partial\ pivoting$ עבור –

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

| $P^{-1}$ | $L$ | $U$ | הסבר מעברים |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | נתחיל על המטריצות באופן הבא |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | מאחר והשיטה הינה $partial\ pivoting$ והאיבר הגדול ביותר בערך מוחלט מתחת ל- $a_{11}$ הינו 3- אז נחליף את השורות $R_1 \leftrightarrow R_2$ |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{17}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$ | נדרג את העמודה הראשונה – $R_2: R_2 + \frac{2}{3}R_1, m_{21} = -\frac{2}{3}$ $R_3: R_3 + \frac{1}{3}R_1, m_{31} = -\frac{1}{3}$ |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{17}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ | נשים לב כי האיבר הגדול ביותר בערך מוחלט מתחת ל-$a_{22}$ הינו 19/3 ולכן נחליף שורות $R_2 \leftrightarrow R_3$ |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{17}{19} & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{50}{19} \end{pmatrix}$ | נדרג את העמודה השנייה – $R_3: R_3 - \frac{17}{19}R_2$ |

# תרגול 6

**הערה:**

אם היינו משתמשים ב - $scaling$ אז הוא היה –

$$s = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

והיינו בודקים מי הכי גדול בווקטור (בערך מוחלט) –

$$\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

שבמקרה הזה הוא $-\frac{3}{4}$ ולכן היינו מחליפים את השורה הראשונה והשנייה ומדרגים וככה ממשיכים עם אותו ה – $scaling$.

## פירוק צ'ולסקי:

אם $M$ סימטרית (כלומר $M = M^T$) וחיובית לחלוטין (דטרמיננטת המינורים הראשיים חיוביים או $\forall \underbrace{\lambda}_{\text{ע"ע}} : \lambda > 0$ או $\forall x : x^T M x > 0$) קיימת $R$ משולשית כך ש –

$$M = RR^T$$

איך מגיעים מ – $LU$ ל - $RR^T$:

$$U = \underbrace{\tilde{U}}_{\substack{\text{משולשית עליונה} \\ \text{(0 על האלכסון)}}} + \underbrace{D}_{\text{אלכסון של } U}$$

$$=> R = L\sqrt{D}$$

# תרגול 6

## תרגול השלמה לבקשת התלמידים עם מרדכי (04/08/2016)

### $partial\ pivoting$ (כולל שחלוף רק לשורות!)

בכל שלב נביא את האיבר הגדול ביותר בערכו המוחלט להיות באלכסון. שימו לב שאנחנו מחליפים שורות רק עם איברים שנמצאים מתחת לאלכסון. השיטה של $pivoting$ חלקי והמלא בא כיוון שאם איבר על האלכסון שווה 0 אלימינציית גאוס לא תעבוד! ($pivoting$ נועד כדי להקטין את מספר המצב של המטריצה).

**דוגמה:**

נתונה המערכת -

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

נפתור בעזרת $pivoting$ חלקי:

$$\xRightarrow{R_2:R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 14 \end{array}\right)\xRightarrow{R_3:R_3-\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3.5 & 2.5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{R_2:R_2\leftrightarrow R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 3.5 & 2.5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)\xRightarrow{R_3:R_3-\frac{4}{7}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 3.5 & 2.5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{11}{7} \end{array}\right)$$

(נשים לב כי הכופלים הינם – $m_{31} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ , $m_{32} = \frac{2}{3.5} = \frac{4}{7}$).

והגענו למצב של משולשית עליונה ולכן נוכל לעשות הצבה לאחור –

$$\frac{11}{7}x_3 = \frac{11}{7} \;=>\; x_3 = 1$$

$$3.5x_2 + 2.5x_3 = 6 \;=>\; x_2 = 1$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 16 \;=>\; x_1 = 2$$

ולכן –

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# תרגול 6

## פירוק $LU$

כאשר נתונה המשוואה –

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

נרצה לפרק את $A$ כך ש –

$$A = \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{תחתונה}}} * \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}$$

**<u>היתרון המרכזי:</u>** במצב זה, אם נותנים לנו מספר מערכות שבכולן $A$ זהה ווקטור $\vec{b}$ שונה אז נוכל למצוא פעם אחת את הפירוק $LU$ של $A$, ובעזרתו נוכל למצוא את כל הפתרונות עבור כל ה- $\vec{b}$ השונים.

$$\begin{cases} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LU \end{cases} => L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} => \begin{cases} 1)\ L\vec{y} = \vec{b} \\ 2)\ U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

<u>אלגוריתם $LU$:</u>

נדרג בלי $pivoting$ את המטריצה $A$. המטריצה המתקבלת נסמן ב- $U$. את המטריצה $L$ נבנה מכופלי השורה בצורה הבאה:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \vdots \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n3} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

כך ש- $m_{ij}$ זה המקדם שאיתו איפסנו את האיבר ה- $i,j$:

$$\boxed{m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}}$$

**<u>תרגיל:</u>**

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

א) פרק את $A$ ל- $LU$.

ב) מצא את $A^{-1}$ בערת פירוק זה.

# תרגול 6

**פתרון:**

א) נדרג את המטריצה –

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\3&5&4\\2&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2:R_2-3R_1]{m_{21}=\frac{3}{1}=3}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\2&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3:R_3-2R_1]{m_{31}=\frac{2}{1}=2}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\0&-9&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3:R_3-\frac{9}{4}R_2]{m_{32}=\frac{9}{4}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\0&0&6.5\end{pmatrix}}_{U}$$

ולכן –

$$U=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&-4&-2\\0&0&6.5\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&\frac{9}{4}&1\end{bmatrix}$$

**כלל אצבע:** ב – $L$ כל האלכסון הוא 1, כלומר - $\forall_i\ a_{ii}=1$.

■

ב) נרצה למצוא את $A^{-1}$ כך ש-

$$A*\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\x_1&x_2&x_3\\\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}}_{A^{-1}}=I$$

נחפש את $x_1,x_2,x_3$:

$$\begin{cases}Ax_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\Ax_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\Ax_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

נשים לב כי-

$$Ax_1=L\underbrace{U\overrightarrow{x_1}}_{\overrightarrow{y_1}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=>L\overrightarrow{y_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

# <u>תרגול 6</u>

וכעת נפתור –

נסמן – $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{y_1}$ ונקבל –

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{9}{4} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל ש –

$$a_1 = 1\,, a_2 = -3\,, a_3 = -4.75$$

כעת נמצא את $\overrightarrow{x_1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \\ \widetilde{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4.75 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל ש –

$$\widetilde{x_3} = 0.7308\,, \widetilde{x_2} = 0.3846\,, \widetilde{x_1} = -1.6154$$

באותו האופן –

$$\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} => \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0.9231 \\ -0.0769 \\ -0.3462 \end{pmatrix}$$

וגם את $\overrightarrow{x_3}$. והתשובה הסופית הינה –

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.6154 & 0.9231 & -0.0769 \\ 0.3846 & -0.0769 & -0.0769 \\ 0.7308 & -0.3462 & 0.1538 \end{bmatrix}$$

■

# תרגול 6

## פירוק $PLU$

<u>מצב שבו פירוק $LU$ אינו עובד –</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

וגם ידוע ש –

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

מצד אחד –

$$=> l_{11} * u_{11} = 0 => l_{11} = 0 \text{ או } u_{11} = 0$$

מצד שני –

$$l_{11}u_{12} = 1$$

$$l_{21}u_{11} = 2$$

ולכן פירוק $LU$ לא עובד ונצטרך לעשות $pivoting$.

פירוק $PLU$ דומה מאוד לפירוק $LU$ רק שאנחנו משתמשים ב - $pivoting$ חלקי (החלפת שורות בלבד). במצב זה נשמור לאורך כל הדרך 3 מטריצות –

$$\underbrace{P}_{\substack{\text{מטריצת} \\ \text{פרמוטציות} \\ \text{(רק החלפת שורה)}}}, \quad \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}, \quad \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}$$

כאשר במטריצה $P$ בכל שורה ובכל עמודה יש את המספר "1" פעם אחת והשאר 0.

**<u>דוגמה:</u>**

נבצע פירוק $PLU$ למטריצה הבאה:

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 12 & 2 & 1 & 0 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1:R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3.25 & 10.25 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow[R_2:R_2+\frac{1}{2}R_1]{m_{21}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \xRightarrow[R_3:R_3-\frac{1}{5}R_1]{m_{31}=\frac{2.4}{12}=\frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$

# תרגול 6

$$\xrightarrow{R_2:R_2\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}12 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25\\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4:R_4-\frac{1}{10}R_2]{m_{42}=\frac{1}{10}}\begin{bmatrix}12 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25\\ 0 & 0 & 15 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3:R_3\leftrightarrow R_4}\begin{bmatrix}12 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 15 & 1\\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4:R_4-\frac{1}{4}R_3]{m_{43}=\frac{3.75}{15}=\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}12 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ולכן נקבל ש –

$$U=\begin{bmatrix}12 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

כעת , נשים לב כי כל החלפת שורה צריך לשמור במטריצה של הפרמוטציה אם יש יותר מהחלפת שורה אחת, צריך לשמור את כל המטריצות של הפרמוטציה ולהכפיל ביניהם בסדר הבא –

$$P=P_n*\ldots*P_2*P_1$$

ולכן –

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},P_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ולכן –

$$P=P_3*P_2*P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ולבסוף –

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 1 & 0\\ -0.5 & 0 & 0.25 & 1\end{bmatrix}$$

# תרגול 6

## מספר מצב ($condition\ number$) של מטריצה

בהינתן המשוואה –

$$Ax = b$$

תמונה...

כעת –

$$\frac{\text{שגיאה יחסית בפלט}}{\text{שגיאה יחסית בקלט}} = \frac{\delta_{\vec{x}}}{\delta_{\vec{b}}} = \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} \underset{\substack{x=A^{-1}b \\ \Delta x = A^{-1}*\Delta b}}{=} \frac{\frac{\|A^{-1}*\Delta b\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} = \frac{\|A^{-1}*\Delta b\|}{\|x\|} * \frac{\|b\|}{\|\Delta b\|}$$
$$\le \frac{\|A^{-1}\| * \|\Delta b\| * \|b\|}{\|x\| * \|\Delta b\|} = \frac{\|A^{-1}\| * \|Ax\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\| * \|A\| * \|x\|}{\|x\|}$$
$$= \boxed{\|A^{-1}\| * \|A\| = cond(A)}$$

**דוגמה:**

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix}$$

נחשב את מספר המצב שלה בעזרת נורמת $L_1$:

$$\|A\|_{L_1} = \max\{11,111\} = 111$$

ולכן –

$$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{pmatrix} 101 & -10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\|A^{-1}\|_{L_1} = 111$$

ובסה"כ –

$$cond(A) = 111 * 111 = 12,321$$

והמטריצה "חולה" (ולכן בדירוג מטריצות כאלו, כלומר עם $cond(A)$ גבוה, נבצע $pivoting$).