

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 4: משפט נתר, משוואות המילטון כמערכת דינמית, סוגרי פואסון ומערכות ייחוס מסתובבות

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה. האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$.

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. חרוז בעל מסה m מאולץ לנוע על חישוק חסר מסה עם רדיוס R . החרוז מחובר לנקודה $(R, 0)$ באמצעות קפיץ בעל קבוע k עם אורך שווי משקל ℓ . המרחק בין החרוז לנקודה $(R, 0)$ הינו x .

(א) הראו כי הלגרנג'יאן נתון ע"י

$$\mathcal{L} = mR^2\dot{\theta}^2 (3 + \cos \theta) / 4 - mR^2\omega^2 (2 \sin(\theta/2) - \ell/R)^2 / 2 - mR^2\Omega^2 \cos \theta,$$

כאשר $\omega^2 = k/m, \Omega^2 = g/R$. רמז: בטאו את x באמצעות (R, θ) .

(ב) רשמו את ההמילטוניאן.

(ג) רשמו את משוואות המילטון.

(ד) מצאו את נקודות שווי המשקל כאשר ידוע כי $\ell = R/2$. מהו התנאי לכך שתתקבל נקודת שווי משקל לא טריוויאלית?

3. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right), a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right)$.

(א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a^*, \mathcal{H}\}$, $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a, a^*\}$

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות (ד). השוו לחישוב הישיר

4. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ (ביחס לאופק) ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של כדור"א Ω .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת (הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת ביחס למערכת האינרציאלית $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ כאשר $\vec{v}' = \dot{x}\hat{e} + \dot{y}\hat{n}$ והזניחו איברים $\mathcal{O}(\Omega^2)$. השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $\ell^2\theta^2 \approx x^2 + y^2$

(ב) כתבו את משוואות אוילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.

(ג) מצאו את התנעים הקנוניים ורשמו את ההמילטוניאן $\mathcal{H}(\Omega)$

(ד) הראו כי $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(0) - L\Omega \sin \lambda$ כאשר L התנע הזוויתי. מה המשמעות של $\mathcal{H}(0)$?

(ה) הראו כי התנע הזוויתי נשמר ע"י שימוש בקשר שקיבלתם בסעיף (ד) ובאמצעות סוגרי פואסון.