

תרגיל 10

29 במאי 2018

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$2y'' - 5y' + 2y = 0 \quad (\text{א})$$

$$9y'' + 6y' + y = 0 \quad (\text{ב})$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (\text{ג})$$

$$y'' - 2y' + 10 = 0 \quad (\text{ד})$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (\text{ה})$$

$$4y'' + 4y' + 1 = 0 \quad (\text{ו})$$

i. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

השורשים הם $\lambda = 2, \frac{1}{2}$, שניהם ממשיים שונים, לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

ii. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2$$

השורש הוא $\lambda = -\frac{1}{3}$, הוא יחיד. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

iii. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)$$

השורשים הם $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 1$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}$$

iv. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

השורשים הם: $\alpha = 2 \pm 3i$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$$

v. המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2 + 10 = 0$$

השורשים הם: $\alpha = \pm \sqrt{10}i$ ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 \cos \sqrt{10}x + C_2 \sin \sqrt{10}x$$

המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2$$

יש רק שורש אחד: $\alpha = -\frac{1}{2}$ ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

2. הוכיחו שלכל α , הפונקציות $y_1 = e^{\alpha x}$, $y_2 = x e^{\alpha x}$ בלתי תלויות. נחשב את הוורונסקיאן:

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x} \end{pmatrix} = e^{2\alpha x} + \alpha x e^{2\alpha x} - \alpha x e^{2\alpha x} = e^{2\alpha x} \neq 0$$

3. בונוס:

הוכיחו שאם $y'' + ay' + by = 0$ מקיימת שיש למשוואה האופיינית רק פתרון אחד α , אז $x e^{\alpha x}$ הוא פתרון של המד"ר. (הדרכה: הציבו אותו במשוואה, וחשבו מה העובדה שיש פתרון אחד אומרת על המקדמים, וכן, אם יש פתרון יחיד, למה הוא בהכרח שווה.)

פתרון:

ראשית, נשים לב שאם יש פתרון יחיד אז הדיסקרימיננטה היא 0, כלומר, $a^2 - 4b = 0$ (זאת הדיסקרימיננטה במקרה שלנו).

כעת, נחשב את הנגזרות של $y = x e^{\alpha x}$

$$y' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$$
$$. y'' = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

נציב במשוואה:

$$2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 e^{\alpha x} + a(e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}) + b x e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(2\alpha + \alpha^2 + a\alpha x + bx)$$

אבל אם α הוא הפתרון היחיד, אז הוא בהכרח שווה ל $-\frac{a}{2}$.

כלומר קיבלנו:

$$e^{\alpha x}(-a + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b) = -a e^{\alpha x} \neq 0$$

(אחרת לא היה פתרון יחיד)