חשבון אינפיניטסימלי 3 - תרגול 4

1 גבולות בנקודה

הגדרה 1.1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ו $p \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות של A. נאמר שלפונקציה $f : A \to \mathbb{R}^m$ קיים גבול ב p, אם קיים $l \in \mathbb{R}^m$, כך שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < \|x-p\| < \delta$ אזי $0 < \|f(x) - l\| < \epsilon$. במקרה הזה נאמר ש l הוא הגבול של f ב p ונסמן

$$\lim_{x \to p} f(x) = l.$$

דוגמה 1.2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0$ כי לכל $0 < \epsilon$ ניתן לחבור $\delta = \sqrt{\epsilon}$ ונקבל

$$\begin{aligned} \|(x,y) - (0,0)\| < \sqrt{\epsilon} &\implies \\ \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\epsilon} &\implies \\ x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 < \left(\sqrt{\epsilon}\right)^2 = \epsilon &\implies \\ \left\|\left(x^2+y^2\right) - 0\right\| < \epsilon & \end{aligned}$$

וקיבלנו את הדרוש על פי ההגדרה.

הגדרה 1.3. תחום ההגדרה של הפונקציה f ב $\mathbb{R}^n$ היא הקבוצה שבה ניתן להגדיר את הפונקציה.

דוגמה 1.4. תחום ההגדרה של $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ ב $\mathbb{R}^2$ הוא $\{(x,y) \,|y \neq 0\}$. תחום ההגדרה של $\frac{x+y}{x-y}$ הוא $\left\{f(x,y) \,\middle|x \neq y\right\}$.

הערה 1.5. אם נבקל לחשב גבול של פונקציה בלי לציין את התחום באופן מפורש, הכוונה היא שהיא מוגדרת בכל תחום ההגדרה שלה.

משפט 1.6. אם ל $f : A \to \mathbb{R}^m$ קיים גבול, אזי הגבול הוא יחיד.

תרגיל 1.7. יהי $A = \{(x,y) \,|x > 0\}$ חצי מישור הימני ב $\mathbb{R}^2$ ונגדיר $f(x,y) = \frac{y}{x}$. הראו ש f לא קיים גבול ב $(0,0)$.

פתרון. נניח שהגבול קיים גבול l. יהי $\epsilon = \frac{1}{2}$. אזי קיים $\delta > 0$ כך שאם $(x,y) < \delta$ אזי $\left|\frac{y}{x} - l\right| < \frac{1}{2}$. נשים לב, שעל כל ישר $y = tx$ מתקיים

$$f(x,y) = \frac{y}{x} = \frac{tx}{x} = t.$$

לכן, אם $\|(x,-x)\| < \delta$ אזי $f(x,-x) = -1$ ו $|-1-l| < \frac{1}{2}$. מצד שני, אם $\|(x,x)\| < \delta$, אזי $f(x,x) = 1$ ו $|1-l| < \epsilon$.
לכן

$$2 = |-1-1| \leq |-1-l| + |l-1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

והגענו לסתירה.

משפט 1.8. (קריטריון היינה לקיום גבול). תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $p \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות של A. תהי $f : A \to \mathbb{R}^m$. אזי $\lim_{x \to p} f(x) = l$ אם ורק אם לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של איברים ב $A \setminus \{p\}$ שמתכנסת ל p מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l .$$

נזכר, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ אם ורק אם היא מתכנסת רכיב-רכיב. מכאן נקבל את המשפט הבא.

דוגמה 1.9. נחזור על הדוגמא הקודמת ונראה שלא קיים גבול בעזרת קריטריון היינה. נחבר סדרה $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ו $b_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$. ברור,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = (0,0) = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

מצד שני מתקיים.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} f(b_n) .$$

ולכן לא קיים גבול על פי קריטריון היינה.

משפט 1.10. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, p נקודת הצטברות של A. $f : A \to \mathbb{R}^m$. אם נסמן $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ו $l = (l_1, \dots, l_m)$, אזי

$$\lim_{x\to p} f(x) = l$$

אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq m$

$$\lim_{x\to p} f_i(x) = l_i .$$

מסקנה. כאשר בודקים אם קיים גבול, מספיק לבדוק שהוא קיים בכל רכיב.

הוכחה. תהי סדרה $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ ב $A \setminus \{p\}$ שמתכנסת ב p. יהי $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ההיטל על k רכיבים הראשונים. (כלומר: $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots x_k)$). אזי $\lim_{n\to\infty} \pi(a_n) = \pi(p)$. (מפני שהמרחק בין

$$\|\pi(a_n) - \pi(p)\|$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(\pi(a_n)) = l$$

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ על ידי $f(x,y)=\left(e^x,y^2\right)$. אזי

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) &= \left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} f_1(x,y), \lim_{(x,y)\to(1,2)} f_2(x,y)\right)\\ &= \left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} e^x, \lim_{(x,y)\to(1,2)} y^2\right)\\ &= (0,4)\end{aligned}$$

(המעבר האחרון הוא דיי ברור, אבל אם נרצה להצדיק אותו פורמלית, אפשר לטעון שלכל סדרה (x_n,y_n) ששואפת ל $(1,2)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} e^{x_n} &= e^2\\ \lim_{n\to\infty} y_n^2 &= 4\end{aligned}$$

בגלל שאיפה רכיב-רכיב). □

כאן, כמו במקרה החד - מימדי אפשר לעשות אריתמטיקת גבולות.

משפט 1.11. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$, p נקודת הצטברות של A ו $f,g:A\to\mathbb{R}^m$. אזי, אם קיימים הגבולות $\lim_{x\to p} f(x)$ ו $\lim_{x\to p} g(x)$ אזי מתקיים:

1. $\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x)$.
2. $\lim_{x\to p} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to p} f(x)$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$.
3. $\lim_{x\to p}\langle f(x), g(x)\rangle = \langle \lim_{x\to p} f(x), \lim_{x\to p} g(x)\rangle$. שימו לב, אם $m=1$ אזי פשוט מדובר בכפל פונקציות.
4. אם $m=1$ ו $\lim_{x\to p} g(x)\neq 0$ אזי $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}$.

תרגיל 1.12. חשבו את הגבולות הבאים, או שהראו שהם אינם קיימים.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x)+xy}{x}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{y\cos x - y}{x^2}$

פתרון.

1. נתשמש באריתמטיקת גבולות.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x)+xy}{x} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x)}{x} + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x}\\ & 1+\lim_{y\to 0} y = 1\end{aligned}$$

2. שוב, נשתמש באריתמטיקת גבולות.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{y\cos x-y}{x^2}&=\\ \lim_{(x,y)\to(0,2)}y\frac{\cos x-1}{x^2}&=\\ \lim_{(x,y)\to(0,2)}y\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\cos x-1}{x^2}&=\\ y\lim_{y\to2}y\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}&=\\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)&=-1\end{aligned}$$

2 רציפות בנקודה ורציפות

הגדרה 2.1. תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$, $a\in A$ נקודה שאינה מבודדת. אזי נאמר, ש f רציפה ב a, אם $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

הערה. מכיוון שרציפות בנקודה מוגדרת על ידי גבול, כל מה שאמרנו על גבולות, נכון גם עבור רציפות בנקודה. בפרט:

1. פונקציה $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה אם ורק אם f רציפה בכל רכיב. לכן, את הצד התאורתי ניתן לצמצם למקרה $f:A\to\mathbb{R}$ (כמו בסדרות וכמו בגבולות).

2. קריטריון היינה לרציפות בנקודה: $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה אם ורק אם לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל a מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=a\,.$$

3. אריתמטיקת גבולות: אם f ו g רציפות ב a, אזי $f+g$, $\langle f,g\rangle$, αf, fg (כאשר מוגדר ו $\frac{f}{g}$) רציפות ב a.

בנוסף, ההגדרה שקולה להגדרה הבאה:

הגדרה 2.2. תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ ו $a\in A$. נאמר, ש f רציפה ב a, אם לכל $0<\epsilon$ קיים $0<\delta$ כך שאם

$$\|x-a\|<\delta$$

אזי

$$\|f(x)-f(a)\|<\epsilon\,.$$

הערה. המשפט הבא מאפשר לבדוק רציפות באופן כמעט מיידי.

הגדרה 2.3. נאמר ש $f : A \to \mathbb{R}^m$ רציפה ב A אם היא רציפה בכל $a \in A$.

הערה. התכונות של היינה, רציפות רכיב-רכיב ואריתמטיקה נשארים נכונים.

משפט 2.4. יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^k, B \subseteq \mathbb{R}^m, C \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $f : A \to B$, $g : B \to C$ כך ש f רציפה ב a, g רציפה ב $f(a)$. אזי, $f \circ g$ המוגדרת על ידי

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

היא פונקציה רציפה ב a.

דוגמה 2.5. הפונקציות e^{x+y}, $\sin(x+y)$, $e^{\sin\left(x^2+y^2+z\right)}$, $\ln\left(\frac{1}{1-xy}\right)$ הן פונקציות רציפות בתחום ההגדרה שלהן.

3 טכניקות נוספות לחישוב גבולות בנקודה.

מפשטים על אריתמטיקה והרכבה מאפשרים לנו לייצר אינספור פונקציות רציפות מפונקציות קיימות. לעיתים קרובות, לא קשה להראות שפונקציה מסויימת היא חיבור, כפל או הרכבה של פונקציות רציפות. יחד עם זאת, לעיתים אנחנו נדרשים לחשב גבולות. נציג מספר טכניקות שניתן להשתמש בהן.

הערה: ברוב הדוגמות נניח ש $p = 0$ מסיבות נוחות. תמיד אפשר להגיע למקרה הזה על ידי החלפת קואורדינטות. בנוסף, ברוב המוחלט של דוגמאות

3.1 התקרבות לאורך מסילות שונות.

משפט 3.1. תהי $f : A \to \mathbb{R}$ ותהי p נקודת הצטברות של A. אזי, אם ל f קיים גבול ב p, אזי לכל $\gamma : (a,b) \to A$ אם

$$\lim_{t \to b} \gamma(t) = p$$

ו $p \leq \gamma(t)$ לכל $t \in (a,b)$, אזי

$$\lim_{t \to b} f(\gamma(t)) = \lim_{x \to p} f(x).$$

נדגים את השימוש בשיטה על ידי מספר דוגמאות. המקרה השפוט ביותר הוא $\gamma(t) = (p_1,p_2) + (t,kt)$ או $\gamma(t) = (p_1,p_2) + (kt,t)$ (כלמר, קו ישר) או עבור מימדים גבוהים יותר $\gamma(t) = t + tv$ עבור $0 \neq v \in V$. נראה כמה דוגמאות.

דוגמה 3.2. חשבו את הגבול או שהראו שהוא לא קיים במקרים הבאים:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

פתרון. נניח שהגול קיים. אזי לכל ישר $y = kx$ מתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2+k^2x} = \frac{k}{1+k^2}$$

התשובה, תלוייה ב k ולכן הגבול אינו קיים.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

פתרון. שוב, נשתמש באותה השיטה. עבור הישר $x = y$, הגבול הוא

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x+x} = 0$$

מצד שני אם נתקרב לאורך הישר $y = 0$ נקבל

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x+0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 .$$

הגבולות שוב שונים. הגענו לסתירה.

זאת שיטה פשוטה ולעיתים נוחה. יחד עם זאת, היא לא תמיד עובדת. כלמר, זה לא נכון שאם קיים גבול לאורך כל קו ישר, אז יש גבול.

דוגמה 3.3. נחשב את הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} .$$

לכל ישר שנבחר, $x, y = (ta, tb)$ עבור $(a,b) \neq (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{ta \cdot t^2b^2}{t^2a^2 + t^4b^4} = \lim_{t\to 0} t\frac{ab^2}{a^2+b^4} = 0 .$$

מצד שני, נתקרב לאורך הפרבולה $x = y^2$, נקבל

$$\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} .$$

השיטה של התקרבות לארוך עקומים שונים, היא יעולה מאד, אמנם היא לא תמיד עובדת.

לעיתים, פשוט קשה למצוא עקום מתאים. יותר מזה, ניתן להראות שיש פונקציות שלכל עקום "סביר" יתנו גבול, למרות שאין להן גבול. בנוסף, היא יכולה לעזור לשלול גבול, אבל לא להראות קיום גבול - מפני שגם אם לכל עקומה שמצאנו, מקבלים אותו גבול, קשה להוכיח שלא קיימת עקומה אחרת שעבורה מקבלים גבול שונה.

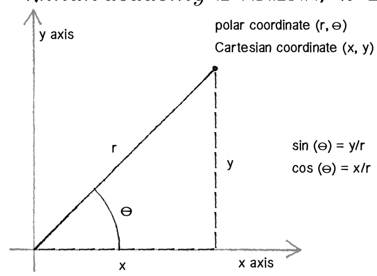
3.2 קואורדינטות פולריות וכדוריות.

הרעיון של הגבול, הוא בעצם שכאשר אנחנו מתקרבים לנקודה, הערך של הפונקציה מתקרב לערך מסויים. אם נצליח להראות שהפונקציה תלויה רק במרחק או להיפך, הראנו קיום או אי-קיום גבול.

השאלה היא, כיצד לחלץ את המרחק? ניתן את התשובה עבור $\mathbb{R}^2$ ו $\mathbb{R}^3$. ניתן להכליל את השיטה למידמים גבוהים יותר, כמובן.

3.2.1 קואורדינטות פולריות (קוטביות).

נשים לב, שכל נקודה ב $\mathbb{R}^2$ ניתן לתאר בדרך נוספת, על ידי פרמטרים חדשים - מרחק של הנקודה מהראשית, שנמן אותה ב $\mathbb{R}$, וזווית שהנקדוה יוצרת עם הצד החיובי של ציר ה x, שנסמן אותה ב θ. (התמונה מ $khan\,academy$).



את הקואורדינטות (x,y) נהוג לקרוא קרטזיות ואת הקואורדינטות (r,θ) קואורדינטות פולריות, או קוטביות.

עכשיו, ננסה לכמת את הקשר בין הקואורדינטות הפולריות לקרטזיות.

מרחק של הנקודה נתון על ידי $r = \sqrt{x^2+y^2}$. כמו כן, אם הקוטור (x,y) יוצר זווית θ עם ציר ה x, אזי המנה של y ו r היא בדיוק $\sin\theta$ והמנה בין x ל r היא בדיוק $\sin\theta$. נקבל

$$(x,y) = r\left(\cos\theta, \sin\theta\right).$$

נשים לב, ש $(x,y) \to (0,0)$ אם ורק אם $r \to 0$ וש (x,y) היא פונקציה רציפה של (r,θ) וגם אם $0 < r$ אזי $r\left(\cos\theta, \sin\theta\right) \neq 0$ ולכן

$$\lim_{r\to 0} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)$$

במידה והגבול בצד הימני קיים. נקודה שאלה צריך להתייחס, היא מה הן הגבולות של r ו θ? עם לא נתון שום אילוץ אחר, בדרך כלל נדרוש ש $0 < r$ או $0 \le r$. עבור θ נרצה קטע באורך שני π ונבחר בדרך $[-\pi,\pi]$ או $[0,2\pi]$. בכל מקרה, נציין שאם $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ העתקה היא על ולא חד-חד ערכית.

דוגמה 3.4. נחשב את הגבול

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\left(r^2\sin^2\theta\right)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0\end{aligned}$$

דוגמה 3.5. נחשב את הגבול (כאשר הפונקציה מוגדרת בתחום ההגדרה הטבעי).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} =$$
$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta} =$$
$$\lim_{r\to\theta} r\frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

ולכן, לא קיים גבול. זאת נקודה עדינה, שיש להתייחס אליה. למרות שלכל θ בתחום ההגדרה הגבול יהיה 0, לכל r נוכל למצוא θ עבורה הביטוי שאת גבולו אנחנו רוצים לחשב, הוא גדול כרצוננו, מפני שהמונה חיובי וחסום, והמכנה אינו חסום מלרע.

3.2.2 קואורדינטות כדוריות ב $\mathbb{R}^3$.c

בדומה, ל $\mathbb{R}^2$, אפשר לתאר כל וקטור על ידי r, המרחק שלו מהראשית וזווית שלו עם ציר X, θ והמישור XY (או ציר ה Z), ϕ.

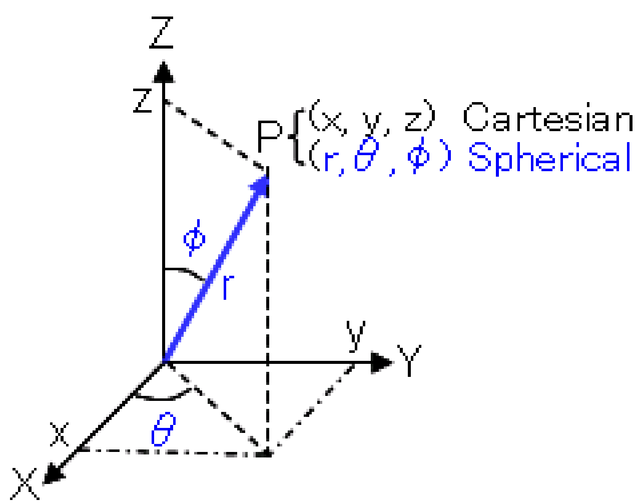
ננסה לפתח נוסחאות. ידוע $x^2+y^2+z^2=r^2$ ולכן נוכל להציג את z על ידי $z=r\sin\phi$ ואת $\sqrt{x^2+y^2}=r\cos\phi$. נשים לב, זה מכריח את ϕ להיות בטווח $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (עד כי הזזה ב 2π, כמובן), מפני ש $r\cos\theta>0$.

מצד שני, אם $\sqrt{x^2+y^2}=r\cos\theta$, נוכל להשתמש בקואורדינטות פולריות, ולהציג אותם על ידי

$$(x,y)=r\cos\phi\,(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

נחבר הכל, ונקבל $(x,y,z)=(r\cos\phi\cos\theta,r\cos\phi\sin\theta,r\sin\phi)$ כאשר $0\le r,-\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le 2\pi$. המשמעות הגאומטרית היא ש ϕ היא הזווית בין הוקטור למישור XY, θ היא הזווית בין ההיטל של הוקטור על המישר XY עם הכיוון החיובי של ציר ה-X, ו r הוא המרחק של הוקטור מהראשית.

באותו אופן, אפשר לקחת $z=r\cos\phi$ ולקבל $(x,y,z)=(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta,r\cos\phi)$, במקרה הזה, ϕ היא הזווית בין הוקטור לכיוון החיובי של ציר ה y, ו r ו θ כמו קודם. ראי עיור מצורף (התמונה מהאתר $Masinsight$)



דוגמה 3.6. חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$.

פתרון. נעבור לפולריות ונקבל

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} =$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^3\phi\cos^3\theta + r^3\sin^3\phi^3\sin^3\theta + r^3\cos^3\phi}{r^2} =$$

$$\lim_{r\to 0} r\left(\sin^3\phi\cos^3\theta + \sin^3\phi\sin^3\theta + \cos^3\phi\right) = 0$$

2. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^3}$.

פתרון 3.7. נעבור שוב לקואורדינטות פולריות. נקבל

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^3\sin^3\phi\cos^3\theta + r^3\sin^3\phi\cos^3\theta + r^3\cos^3\phi}{r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + r^3\cos^3\theta} =$$

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{\sin^3\phi\cos^3\theta + \sin^3\phi\sin^3\theta + \cos^3\phi}{\sin^2\phi + r\cos^3\phi} =$$

שוב אין גבול. אם נקבע $\phi = 0$ נקבל

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{\sin^3\phi\cos^3\theta + \sin^3\phi\sin^3\theta + \cos^3\phi}{\sin^2\phi + r\cos^3\phi} = 1 .$$

מצד שני, אם נציב $\phi = \frac{\pi}{2}$ נבקל

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{\sin^3\phi\cos^3\theta + \sin^3\phi\sin^3\theta + \cos^3\phi}{\sin^2\phi + r\cos^3\phi} = 0 .$$

לכן הגבול אינו קיים.

השימוש בקואורדינטות פולריות וכדוריות, מבחינה תאורתית עובד תמיד, מפני שאם הגבול קיים בקרטזיות אז הוא קיים גם בפולריות וכדוריות. אם לא יודעים כיצד להתחיל, יש סיכוי דיי גבוה שהחלפה לפולריות או כדוריות תיתן פתרון. במקרה הגרוע - תקבלו במקום גבול שאתם לא יודעים לחשב, אותו גבול שאתם לא יודעים לחשב בהצגה אחרת. מצד שני, לעיתים ניתן להשתמש בשיטות פשוטות יותר.

3.2.3 גבולות חוזרים

גבול חוזר הוא ביטוי מהצורה

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) .$$

או

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) .$$

הגבולות לא בהכרח שווים, ולעיתים אפילו לא מוגדרים. (על מנת שכן יהיו מוגדרים, צריך ש $\lim_{y\to b} f(x,y)$ יהיה מוגדר לכל x ו $\lim_{x\to a} f(x,y)$ יהיה מודגר לכל x. (או לפחות בסביבה כלשהי של (a,b)). כמו כן, שוויון שלהם לא מבטיח קיום גבול וקיום גבול לא מבטיח קיום של שניהם.

דוגמה 3.8. נראה דוגמה בהם הגבולות החוזרים קיימים ושונים.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x}{x+y}=1$$

ו

$$.\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+y}=0$$

נראה דוגמה בה הגבולות החוזרים שווים אך הגבול לא קיים.

$$.\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

מצד שני, כמו שראינו כבר, לא קיים הגבול

$$.\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

נראה מקרה שבו הגבול קיים, ולא קיים אחד הגבולות החלקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\left(\cos\frac{1}{y}\right)=0$$

מפני שמתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|x\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right|\leq\lim_{x\to 0}|x|=0$$

מצד שני, הגבול

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}\right)$$

אינו קיים, מפני שהגבול $\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}$ אינו קיים באף נקודה.

המשפט הבא נותן כלי שימושי לבדיקת קיום גבול בעזרת גבולות חוזרים.

משפט 3.9. אם f מוגדרת בסביבה של (a,b) וקיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$$

והגבול $\lim_{y\to b}f(x,y)$ לכל x בסביבת a אזי קיים הגבול $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b}f(x,y)\right)$ ומתקיים:

$$.\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)$$

מסקנה 3.10. אם הגבולות החזורים $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f\left(x,y\right)$ ו $\lim_{x\to b}\lim_{x\to a} f\left(x,y\right)$ קיימים ושונים, אזי לא קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right).$$

דוגמה 3.11. לפקונצקיה $f\left(x,y\right)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^4}$ לא קיים גבול ב $(0,0)$ מפני ש

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3-y^4}{x^2+y^4}=0\neq -1=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3-y^4}{x^2+y^4}.$$

3.2.4 הוכחת קיום גבול מקיום גבולות חוזרים. (ניתן לא לעשות בתרגול או לדלג בקריאה עצמית).

הערה 3.12. מקיום של גבולות חוזרים ניתן בתנאים מסויימים להסיק קיום גבול.

הגדרה 3.13. נאמר שהפונקציה $f\left(x,t\right)$ מתכנסת במידה שווה ל $g\left(x\right)$ ב $X\times[c,d]$ ב p, אם $p\in[c,d]$, לכל $x\in X$ קיים הגבול

$$\lim_{t\to p} f\left(x,t\right)=g\left(x\right)$$

קיים, ולכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|t-p|<\delta$ אזי $|f\left(x,t\right)-g\left(t\right)|<\epsilon$.

נשים לב, שהמושג הוא לא ממש חדש, ואומר את הדבר הבא: לכל סדרה $t_n\to p$ הפונקציה $f\left(x,t_n\right)$ מתכנס במידה שווה ל $g\left(x\right)$. יתר על כך, כבר ראינו מקרה אחד.

הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)$ קיים אם ורק אם קיים l כך שהפונקציה $f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה הקבועה $g\left(\theta\right)=l$.

המשפט הבא נותן תנאי מספיק לקיום גבולות חוזרים, שוויון שלהל וקיום גבול.

משפט 3.14. תהי $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, תהי $(p,q)\in[a,b]\times[c,d]$ ונניח שלכל $y\neq q$ קיים הגבול $\lim_{x\to p} f\left(x,y\right)$ ונניח שעל הקבוצה $[a,b]\setminus\{p\}$, $\lim_{y\to q} f\left(x,y\right)$ קיים ומתכנס במ"ש, אזי קיימים והגבולות החוזרים והגבול $\lim_{(x,y)\to(p,q)} f\left(x,y\right)$ ויש שוויון בינהם.

דוגמה. החישוב בעזרת קואורדינטות פולריות, הוא למעשה בדיקה של התכנסות במ"ש ומספק מספר דוגמאות בהן המשפט עובד.

4 פונקציות רציפות וקבוצות פתוחות בתתי-מרחבים.

ברוב המקרים לא מעניין אותנו מה קורה בנקודה בודדת אלא במרחב כולו. כבר הגדרנו רציפות בחקל הקודם. ניתן תנאים שקולים לרציפות שלעיתים ניתן לקחת בתור הגדרה שלה.

משפט 4.1. הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ רציפה, אם ורק אם:

1. אם ורק אם לכל $x\in\mathbb{R}^n$, לכל סביבה פתוחה N של $f\left(x\right)$, קיימת סביבה פתוחה U של x, כך ש $f\left(U\right)\subseteq N$.
2. לכל קבוצה פתוחה U ב $\mathbb{R}^m$, התמונה ההפוכה של U תחת f, $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^n$.

3. לכל כדור פתוחה $B\left(x,r\right)$ ב $\mathbb{R}^{m}$, $f^{-1}\left(B\left(x,r\right)\right)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$.
4. לכל קבוצה סגורה U ב $\mathbb{R}^{m}$, התמונה ההפוכה של U תחת f, היא $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$.

המשפט נותן תשובה עבור רציפות ב $\mathbb{R}^{n}$. אמנם, כפי שראיתם בקורסים הקודמים באינפי, לעיתים קרובות, אנו מעוניינים בהתנהגות של פונקציה על תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{n}$ ולא על המרחב כולו. בנוסף, לעיתים הקפונציה לא מוגדרת וגם לא ניתן להגדיר אותה על $\mathbb{R}^{n}$ כולו. נציג הגדרה שתאפשר לנו לפשט מספר הגדרות ומשפטים בהמשך.

הגדרה 4.2. תהי $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$. נאמר ש

1. $U\subseteq X$ פתוחה ב X (שימו לב, ב X ולא $\mathbb{R}^{n}$) אם קיימת קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{R}^{n}$ כך ש $V\cap X=U$.
2. נאמר, ש $U\subseteq X$ סגורה ב X, אם קיימת קבוצה סגורה $V\subseteq\mathbb{R}^{n}$ כך ש $V\cap X=U$.

הערה 4.3. ניתן להסתכל על $\left(X,\left\Vert \cdot\right\Vert \right)$ בתור מרחב עצמאי, ולהגדיר כדורים פתוחים, כדורים סגורים, קבוצות פתוחות וסגורות בדיוק באותו אופן שעשינו ב $\mathbb{R}^{n}$. במקרה הזה, ההגדרה שהבאנו עכשיו הופכת למשפט: קבוצה U פתוחה (סגורה) ב X אם ורק אם קיימת קבוצה פתוחה (סגורה) V ב $\mathbb{R}^{n}$ כך ש $X\cap V=U$. יש דיון מפורט בקובץ המלווה את מערך 3.
כמו כן, חשוב לציין שלהיות פתוחה היא תכונה יחסית - אם $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ו $U\subseteq A$ פתוחה ב A, U לא בהכרח פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$.

דוגמה 4.4. $\mathbb{Z}$ פתוחה בתוך עצמה אך אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$, $\left(0,1\right)$ סגורה בתוך עצמה אך אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

תרגיל 4.5. הוכיחו את הטענות הבאות.

1. אם $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$ ו $U\subseteq A$ פתוחה ב A אזי U פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$.
2. אם $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סגורה ב $\mathbb{R}^{n}$ ו $U\subseteq A$ סגורה ב A אזי U סגרוה ב $\mathbb{R}^{n}$.

פתרון. אם $U\subseteq A$ פתוחה ב A, אזי קיימת $V\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה כך ש $V\cap A=U$. אבל A היא פתוחה, ולכן $A\cap V$ גם פתוחה. הטענה עבור סגורה מוכיחים באותו אופן, ומחליפים מילה פתוחה בסגורה.

המשפט נשאר נכון, אם מחליפים את $\mathbb{R}^{n}$ בכל תת-קבוצה של A.

משפט 4.6. הפונקציה $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ רציפה, אם ורק אם:

1. אם ורק אם לכל $x\in A$, לכל סביבה פתוחה של N של $f\left(x\right)$, קיימת סביבה פתוחה U של x, כך ש $f\left(U\right)\subseteq N$.
2. לכל קבוצה פתוחה U ב $\mathbb{R}^{m}$, התמונה ההפוכה של U תחת f, $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$.
3. לכל כדור פתוחה $B\left(x,r\right)$ ב $\mathbb{R}^{m}$, $f^{-1}\left(B\left(x,r\right)\right)$ פתוחה ב A.
4. לכל קבוצה סגורה U ב $\mathbb{R}^{m}$, התמונה ההפוכה של U תחת f, היא $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^{n}$.

המשפט האחרון נותן עוד דרך לקבוע אם קבוצה מסויימת היא פתוחה או לא.

דוגמה 4.7. הראו שהקוצה $A=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{x^2}=y\right\}$ היא קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}^2$

פתרון. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x,y)=x^2y$. הפונקציה רציפה בתור, ככפל של פונקציות רציפות. מתקיים

$$f^{-1}(\{1\})=A,$$

ומכיוון ש $\{1\}$ היא קבוצה סגורה, אז A היא קבוצה סגורה.

כמו כן, בעזרת המשפט האחרון, ניתן להרות ביתר קלות אם פונקציה מסויימת רציפה או לא.

תרגיל 4.8. תהיינה $f,g:A\to\mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות. הראו ש $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ היא פונקציה רציפה.

פתרון. ניתן במאמץ מסויים להראות בעזרת δ ו ϵ, אבל מסורבל. ננסה דרך אחרת.
על פי המשפט שרשמנו, מספיק להראות, ש $h^{-1}[(a,b)]$ פתוחה לכל כדור פתוח a. מתקיים

$$\begin{aligned}
h^{-1}[(a,b)] &= \{x\in A|\min\{f(x),g(x)\}\in(a,b)\}\\
&= \{x\in A|a<\min\{f(x),g(x)\}\}\cap\{x\in A|\min\{f(x),g(x)\}<b\}\\
&= \{x\in A|a<f(x)\wedge a<g(x)\}\cap\{x\in A|\,(f(x)<b)\vee(g(x)<b)\}\\
&= f^{-1}[(a,\infty)]\cap g^{-1}[(a,\infty)]\cap\left(f^{-1}[(-\infty,b)]\cup g^{-1}[(-\infty,b)]\right)
\end{aligned}$$

כל קבוצה בשורה אחרונה היא פתוחה כתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה תחת פונקציה רציפה, $h^{-1}[(a,b)]$ נתונה כאיחודים וחיתיכים סופיים של קבוצות פתוחות ולכן פתוחה.

טענה 4.9. נשים לב, שהכיוון השני של המשפט לא בהרכח נכון. ייתכן ש $X\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה /סגורה ו $f:X\to\mathbb{R}^m$ רציפה, אבל $f(X)$ אינה פתוחה /סגורה ב $\mathbb{R}^m$.

תרגיל 4.10. הראו דוגממה לטענה הקודמת.
נשים לב, ש $\mathbb{N}$ קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}$. נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ על ידי $f(n)=\frac{1}{n}$. זאת פונקציה רציפה, מפני שכל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ היא פתוחה ביחס ל $\mathbb{N}$. (כל נקודות ב $\mathbb{N}$ הוא כדור פתוח, כל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ היא איחוד של נקודונים שהם פתוחים ב $\mathbb{N}$ ולכן פתוחה). מכאן מקבלים, שכל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ היא משלים של קבוצה פתוחה ב $\mathbb{N}$ ולכן סגורה.
מצד שני $f(\mathbb{N})=\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה קבותה ואינה פתוחה ואינה סגורה, כפי שראינו מספר פעמים עד עכשיו.

5 תכונות של פונקציות רציפות.

דוגמאות נוספות על הקשר בין רציפות לקשירות מופיע במערך הקודם

5.1 רציפות וקומפקטיות.

עוכדה 5.1. תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם ורק היא חסומה וסגורה.

משפט 5.2. אם A קומפקטית ו $f:A\to\mathbb{R}^m$ רציפה אזי $f(A)$ קומפקטית.

תרגיל 5.3. הראו שאם קיימת $f:\overline{B}(0,1)\to B(0,1)$ היא רציפה, אזי f אינה על.

פתרון. אם f על, אזי $f\left(\overline{B}(0,1)\right)=B(0,1)$. אבל $B(0,1)$ אינה קומפקטית כי אינה סגורה. קיבלנו סתירה.

מסקנה 5.4. (משפט ויירשטאס) אם A קומפקטית ו $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי A מקבלת מינימום ומקסימום.

תרגיל 5.5. תהי A קומפטית ו $f:A\to\mathbb{R}^n$. הראו, שקיימת $x\in A$ כך ש $\|f(x)\|$ היא מקסימלית ב $f(A)$.

פתרון. נשים לב, ש $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה (לפחות עבור הנורמה הסטנדרטית, למרות שזה נכון עבור כל נורמה). אזי $\|f(x)\|$ היא פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית, ולכן מקבלת מינימום ומקסימום וזה בדיוק אומר שקיים x כך ש $\|\cdot\|$ היא מקסימלית.

5.2 רציפות וקשירות

הגדרה 5.6. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$. נאמר ש A קשירה, אם לא קיימות U,V פתוחות וזרות כך ש $U\cup V=A$.

יש דוגמאות במערך הקודם.

תרגיל 5.7. הראו שאם A בת-מניה ו $|A|>1$ אזי A אינה קשירה.

פתרון. תהי $a\in A$. מכיוון ש A בת-מניה, קיים $r\in\mathbb{R}$ כך שכל $\|x-a\|\neq r$ לכל $x\in A$. אזי $A_1=B(a,r)$ ו $A_2=A\setminus\overline{B}(a,r)$ הן קבוצות וזרות שמקיימות $A=A_1\cup A_2$, ולכן A אינה קשירה.

המשפט הבא מראה את הקשר בין קשירות לרציפות.)

משפט 5.8. אם A קשירה ו $f:A\to\mathbb{R}^n$ רציפה, אזי $f(A)$ קשירה.

יש דוגמאות לשימוש במשפט בסוף המערך הקודם. ניתן לעשות אותן במידה ויש רצון.

הגדרה 5.9. קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת קשירה, אם לכל $x,y\in A$ קיימת מסילה $\gamma:[a,b]\to A$ כך ש $\gamma(b)=x$ ו $\gamma(b)=y$.

משפט 5.10. כל קבוצה קשירה מסילתית היא קשירה.

משפט 5.11. קבוצה פתוחה U ב $\mathbb{R}^n$ היא קשירה אם ורק אם היא קשירה מסילתות.

תרגיל 5.12. תהיינה X,Y קבוצות קשירות. אזי $X\times Y$ קשירה.

פתרון. יהיו (x_1,y_1) ו (x_2,y_2). קיימת מסילה $\gamma_1:I_1\to X$ שתמחילה ב x_1 ומסתיימת ב x_2. אזי $\tilde{\gamma}_1:I\to X\times Y$ המוגדרת על ידי

$$\tilde{\gamma}_1(t)=(\gamma_1,y_1)$$

היא פונקציה רציפה, כלמר מסילה, שמתחילה ב (x_1,y_1) ומסתיימת ב (x_2,y_2). באותו אופן קיים $\gamma_2:I_2\to X\times Y$ שתחילה ב y_1 ומסתיימת ב y_2, ונוכל להגדיר מסילה $\tilde{\gamma}_2:I_2\to X\times Y$ על ידי

$$\tilde{\gamma}_2(t)=(x_2,\gamma_2(t))$$

והיא מתחילה ב (x_2,y_1) ומסתיימת ב (x_2,y_2). נשרשר את המסילות (כלמר, על ידי הזזה של I_2 או I_1) ונקבל את הדרוש.