

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 3: משוואות אוילר לגראנג'

1. *The brachistochrone problem* בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה (x_1, y_1) לנקודה (x_2, y_2) לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
 נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה
 $(x(\phi) = -a(\phi - \sin \phi), y(\phi) = a(1 - \cos \phi), a < 0$

(א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

(ב) הניחו פרמטריזציה $\phi(t) = \{0 \leq t \leq t_{1,2}^{cyc}; \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$
 וחשבו את $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$

(ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

2. הראו כי $t_{1,2}^{cyc}$ כאשר נוסעים מנקודה (x_1, y_1) למינימום של הציקלואידה $(-\pi a, 2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה (x_1, y_1)
 (רמז: קבלו משימור אנרגיה את האינטגרל $\int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{\cos \phi_0 - \cos \phi}} d\phi$ כאשר ϕ_0 הזווית בנקודת ההתחלה, והראו כי הוא שווה ל π).

3. גוף נע על פני המישור הדו-ממדי (r, θ) תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r) = Ce^{-\alpha r}$.

(א) רשמו את הלגראנג'ין של המערכת

(ב) קבלו את משוואות התנועה

(ג) מהו התנע הזוויתי? הראו כי הוא נמשך

(ד) עבור תנאי התחלה עם תנע זוויתי L_0 , מהו הפוטנציאל האפקטיבי של המערכת?

(ה) ב $t = 0$ מצב הגוף נתון ע"י

$$r(t=0) = r_0,$$

$$\dot{r}(t=0) = 0,$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \omega.$$

מה יהיה מצב הגוף $(r, \dot{r}, \dot{\theta})$ כאשר $t \rightarrow \infty$?

4. שני מוטות חסרי מסה באורך r כל אחד מחוברים בקצותיהם. מסה m מקובעת באמצע כל אחד מן המוטות. המוט התחתון מוחזק אנכית, וקצהו מחובר לקרקע. המוט העליון מוסט בזווית ϵ ביחס למוט האנכי (איור a). מצאו את התאוצות הזוויתיות ברגע בו משחררים את המוטות ממנוחה. (הניחו כי $\epsilon \ll 1$, רשמו את מיקומי המסות כמתואר באיור b והשתמשו בקרוב זווית קטנות).

