אביב תש"ף

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 3: משוואות אויילר לגראנג'

1. *The brachistochrone problem* בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה (x_1,y_1) לנקודה (x_2,y_2) לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה $x(\phi)=-a(\phi-\sin\phi), y(\phi)=a(1-\cos\phi),\ a<0$).

   (א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

   (ב) הניחו פרמטריציה $\phi(t)=\{0\le t\le t_{1,2}^{cyc};\ \phi(0)=0,\phi(t_{1,2}^{cyc})=\pi\}$ וחשבו את $t_{1,2}^{cyc}=\int_1^2 ds/v$

   (ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc}=\sqrt{1+4/\pi^2}$

2. הראו כי $t_{1,2}^{cyc}$ כאשר נוסעים מנקודה (x_1,y_1) למינימום של הציקלואידה $(-\pi a,2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה (x_1,y_1)
(רמז: קבלו משימור אנרגיה את האינטגרל $\int_{\phi_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0-\cos\phi}}d\phi$, כאשר ϕ_0 הזוית בנקודת ההתחלה, והראו כי הוא שווה ל π).

3. גוף נע על פני המישור הדו־ממדי (r,θ) תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r)=Ce^{-\alpha r}$.

   (א) רשמו את הלגראנג'ין של המערכת

   (ב) קבלו את משוואות התנועה

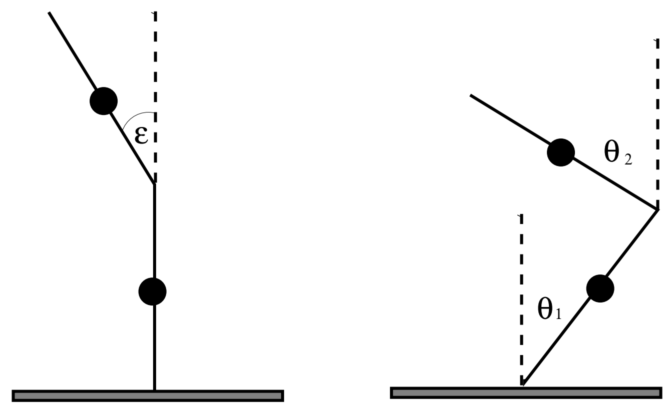
   (ג) מהו התנע הזויתי? הראו כי הוא נשמר

   (ד) ב $t=0$ מצב הגוף נתון ע"י

$$\begin{aligned} r(t=0) &= r_0, \\ \dot r(t=0) &= 0, \\ \dot\theta(t=0) &= \omega. \end{aligned}$$

   מה יהיה מצב הגוף $(r,\dot r,\dot\theta)$ כאשר $t\to\infty$?

4. שני מוטות חסרי מסה באורך $2r$ כל אחד מחוברים בקצותיהם. מסה m מקובעת באמצע כל אחד מן המוטות. המוט התחתון מוחזק אנכית, וקצהו מחובר לקרקע. המוט העליון מוסט בזוית ϵ ביחס למוט האנכי (איור a). מצאו את התאוצות הזויתיות ברגע בו משחררים את המוטות ממנוחה. (הניחו כי $\epsilon << 1$, רשמו את מיקומי המסות כמתואר באיור b והשתמשו בקרוב זויות קטנות).



a b