

## תרגיל 4

להגשה עד 14.12.16

### שאלה 1

תזכורת: נאמר שקבוצה  $S \subset \mathbb{R}$  היא מטיפוס  $G_\delta$  אם ניתן להציג אותה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות. תהי  $E \subset \mathbb{R}$ . הוכיחו שקיימת קבוצה  $S \in G_\delta$  עבורה מתקיים:  $E \subseteq S$ , וכן  $m^*(S) = m^*(E)$ .

**הדרכה:** עקבו אחרי השלבים הבאים:

- השתמשו בהגדרה של  $m^*$  והוכיחו שלכל קבוצה  $E \subset \mathbb{R}$ , ולכל  $\epsilon > 0$ , קיימת קבוצה פתוחה  $O$  עבורה מתקיים:  $m^*(O) < m^*(E) + \epsilon$ .
- בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ 1. וחיתכו אותן.

### שאלה 2

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ . הראו שאם  $A$  קבוצה חסומה אזי  $m^*(A) < \infty$ . האם ההפך נכון?

### שאלה 3

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ , ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}$ . נגדיר  $aA + b$  להיות התמונה של  $A$  תחת הטרנספורמציה הליניארית  $T(x) = ax + b$ . כלומר:  $aA + b = \{ax + b : x \in A\}$ .

- הוכיחו כי  $m^*(aA + b) = |a|m^*(A)$ .
- נתון כי  $A$  מדידה לבג. האם  $aA + b$  מדידה לבג?

### שאלה 4

עבור  $x \in [0, 1]$ , נסמן ע"י  $x = 0.x_1x_2x_3 \dots$  את הפיתוח העשרוני של  $x$ . תהי  $A = \{x \in [0, 1] : x_1 = 9 \text{ and } x_{13} \leq 4\}$  הוכיחו כי

$$m^*(A) = \frac{1}{20}$$

### שאלה 5

תהי  $\hat{C}$  קבוצת קנטור.

- הוכיחו כי העוצמה של  $\hat{C}$  היא עוצמת הרצף. כלומר  $|\hat{C}| = 2^{\aleph_0} = \aleph$ .
- הוכיחו כי  $\hat{C}$  אינה איחוד בן מניה של קטעים סגורים.
- הוכיחו כי המידה החיצונית של קבוצת קנטור הסטנדרטית  $\hat{C}$  היא אפס. כלומר  $m^*(\hat{C}) = 0$ .

**בהנאה (:**