אינפי 4 - תרגיל 2

תאריך הגשה: 3-4 אפריל 2017

תרגיל 1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int\limits_{\gamma}(2x+y+z)\mathrm{d}l$ כאשר $\gamma(t)=(t+1,t+2,3)$ עבור $0\le t\le 2$
2. $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$ כאשר $\Gamma=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4x\}$
3. $\int\limits_{\Gamma}xyz\mathrm{d}l$ כאשר $\Gamma=\{(x,y,z)\mid x=t,\quad y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\quad z=\frac{1}{2}t^2, 0\le t\le 1\}$

תרגיל 2. נתון קפיץ על ידי $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,3t)$ כך שצפיפות המסה בנקודה (x,y,z) היא $x^2+y^2+z^2$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $(1,0,0)$ ואורכו $\sqrt{360}\pi$.

תרגיל 3. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם תמונה Γ. תהי f פונקציה המוגדרת על Γ עבורה האינטגרל $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים.

1. הוכיחו כי f חסומה.
2. יהי M חסם של f. הוכיחו שמתקיים $\left|\int_\gamma f\mathbf{d}l\right|\le ML(\gamma)$.

הדרכה (לשני הסעיפים): עבדו עם ההגדרה של $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ כגבול של סכומי רימן.

תרגיל 4. תהיינה $\beta:[c,d]\to\mathbb{R}^n,\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ שתי עקומות. נתון כי קיימת $\phi:[a,b]\to[c,d]$ כך ש $\beta\phi=\alpha$ ונתון כי ϕ היא חח"ע ועל, מונוטונית עולה, רציפה וההופכית ϕ גם רציפה (אבל לא נתון כי ϕ גזירה! ולכן לא ברור אם α ו β שקולות). הוכיחו כי לכל f המוגדרת על תמונת α,β מתקיים כי האינטגרל $\int_\alpha f\mathbf{d}l$ קיים אם ורק אם האינטגרל $\int_\beta f\mathbf{d}l$ קיים ובמקרה זה

$$\int\limits_{\alpha}f\mathbf{d}l=\int\limits_{\beta}f\mathbf{d}l$$

הדרכה: הראו כי לכל חלוקה $P:a=p_0<p_1<\cdots<p_n=b$ של קטע $[a,b]$ וסדרה של נקודות $\{t_i\}_{i=1}^n$ שמקיימות $t_i\in[p_{i-1},p_i]$ קיימת חלוקה $P':c=p'_0<p'_1<\cdots<p'_n=d$ וסדרה של נקודות $t'_i\in\left[p'_{i-1},p'_i\right]$

$$\|\alpha(p_i)-\alpha(p_{i-1})\|=\left\|\beta(p'_i)-\beta\left(p'_{i-1}\right)\right\|$$

ו

$$\alpha(t_i)=\beta(t'_i)$$

לכל $1\le i\le n$.

תרגיל 5. תהיינה $\beta:[c,d]\to\mathbb{R}^n,\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ שתי עקומות חלקות וחח"ע בעלות אותה תמונה Γ כך שמתקיים

$$\alpha(a)=\beta(c)$$
$$\alpha(b)=\beta(d)$$

1. הוכיחו כי $\phi=\beta^{-1}\circ\alpha:[a,b]\to[c,d]$ היא פונקציה חח"ע ועל.
2. הראו כי Γ קומפקטית.
3. הראו ש β^{-1} רציפה. (הדרכה: תהי $U\subseteq[a,b]$ קבוצה סגורה. הראו ש $\beta\left(U\right)$ סגורה - מומלץ להשתמש בסדרות. הסיקו שתמונה הפוכה של קבוצה סגורה תחת β^{-1} היא גם סגורה והסיקו ש β^{-1}רציפה).
4. הראו ש $\beta^{-1}\circ\alpha$ רציפה ומונוטונית עולה ממש.
5. הסיקו מהתרגיל הקודם כי לכל פונקציה f המוגדרת על Γ מתקיים כי $\int_\alpha f\mathbf{d}l$ קיין אם ורק אם האינטגרל $\int_\beta f\mathbf{d}l$ קיים ובמקרה זה
$$\int\limits_\alpha f\mathbf{d}l=\int\limits_\beta f\mathbf{d}l$$

הערה: אינטואיטיבית, תרגיל זה מראה שאין תלות בפרמטריזציה שאנחנו בוחרים בשביל לייצג עקומה כלשהיא הנתונה כקבוצה.