תירגול 2

23 באוקטובר 2013

מערכת משוואות לינאריות

דוגמא $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+8y=0 \end{cases}$, $x_1+x_2+x_3+x_4=1+i$

הגדרה פורמאלית: מערכת משוואות לינאריות היא מערכת מהצורה:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

כאשר x_iנעלמים עם חזקה 1, a_{ij}, b_iקבועים המגיעים משדה $\mathbb{F}$(אצלנו בקורס $\mathbb{F}=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$)

המטרה: לפתור את המערכת - כלומר למצוא האם יש למערכת פתרון ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ - כך שהם מקיימים את m המשוואות),

אם יש כמה פתרונות יש? (1 או ∞) (בשדות שלנו תמיד הפתרון הוא אחד מהשלושה)

איך עושים את זה?

1. שימוש בפעולות מותרות (פעולות שלא משנות את הפתרון של המערכת) על מנת לפשט את המערכת ולהגיע למצב שהפתרון "קופץ לעין" (בהמשך)

- החלפת שורות - בדוגמא $\begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+8y=0 \end{cases}$

  (מסומן: $R_i \leftrightarrow R_j$)

- הכפלת שורה בסקלאר שונה מ-0 $\begin{cases} 2.5x+4y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1\to R_1} \begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

  (סימון: $\alpha R_i \to R_i$, $\alpha\neq 0$)

- חיבור כפולת שורה אחת לשורה אחרת $\begin{cases} 5x+8y=0 \\ 4.5x+5y=1 \end{cases} \xrightarrow{R_2+\frac{1}{2}R_1\to R_1} \begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

  (סימון: $R_i+\alpha R_j\to R_i$, α יכול להיות שווה 0)

הערה: פעולות אלו נקראות גם פעולות אלמנטריות והם לא משנות את פתרון המערכת (השתכנעו!)

2. מעבר לסימון מטריצות לשם נוחות -

$$\left(\begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right), or \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$$

הערה: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ נקראת מטריצת המקדמים, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ נקרא וקטור הפתרונות ו $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ וקטורים הנעלמים .

במקרה הכללי $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

והמערכת מוצגת כ $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ או $Ax = b$

תרגיל 1:

פתור את המערכת הבאה: $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ x - y + 5z = 6 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

פתרון

נעבוד עם המטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_2\to R_2]{-\frac{1}{6}R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1+R_3\to R_1]{R_2+2R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

לסיכום $x = 1.5,\ y = -2,\ z = 0.5$ הם הפתרון של המערכת.

תרגיל 2:

פתור את המערכת $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ x - y = 6 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

זה המערכת עם שתי העמודות הימניות ממקודם ולכן

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right)$$

כלומר אין פתרון כי התרגום של השורה האחרונה הוא $0x+0y=0.5$ שזה לא מתקיים.

תרגיל 3:

פתור את המערכת הבאה: $\begin{cases} x+2y-z= & -3 \\ x-y+5z= & 6 \end{cases}$

פתרון

זה שתי השורות העליונות ממקודם ולכן

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

נציב $z=t$ להיות משתנה חופשי ונקבל

כי $x+3t=3$, $y-2t=-3$, ולכן $x=3-3t$, $y=-3+2t$

ולכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3t \\ -3+2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שימו לב כי $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ הינו פתרון פרטי של המערכת הלא הומגנית $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$

(ע"י הצבה $t=0$)

ו־ $t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא הפתרון הכללי למערכת ההומגנית $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$

צורה מדורגת

הגדרה:

1. תהא מטריצה A מגודל $m\times n$ עם שורה שאינה כולה אפסים. המקדם הראשון בשורה שאינו אפס נקרא איבר מוביל או ציר.
2. משתנה המתאים לעמודה שקיים בה ציר נקרא משתנה תלוי.
3. משתנה המתאים לעמודה בלי ציר נקרא משתנה חופשי.

   תוצאה ישירה מספר המשתנים התלויים+ מספר המשתנים החופשיים = למספר המשתנים הכולל= מספר עמודות המטריצה.
4. הצורה המדורגת של מצריצה Aהיא מטריצה המתקבלת ע"י פעולות אלמנטריות וצורתה הסכמתית היא

$$\begin{pmatrix} * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (לא צורה מדורגת $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right)$)

- שורות אפסים מופיעות בסוף.
- מתחת לכל ציר ישנו טור אפסים.

- כל ציר נמצא מימין לציר של השורה שמעליו.

ניתוח: ע"י הצורה המדורגת ניתן להסיק האם וכמה פתרונות יש למערכת.

- אם הצורה הסכמטית היא $\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & a \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$ $a \neq 0$ אין פתרון (שורת שמורכבת מאפסים במטריצת המקדמים ו־$a \neq 0$ בעמודת הפתרון)

- אם הצורה הסכמטית היא $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ אזי יש משתנים חופשיים והם יגרמו ל ∞ פתרונות. ("מספר העמודות של מטריצת המקדמים>מספר המשוואות=מספר השורות=מספר הצירים")

- אם הצורה הסכמטית היא $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ אזי יש פתרון יחיד (מספר העמודות של מטריצת המקדמים =מספר השורות=מספר הצירים)

הערות:

1. התרגילים שעשינו מהווים דוגמא לכל אחד מבין המצבים.

2. גם כאשר יש ∞פתרונות יש חשיבות לכמה "דרגות חופש" יש (כמה משתנים חופשיים קיימים)

   דוגמא: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 12 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

   ואז y, z משתנים חופשיים ו x משתנה תלוי. s $y = t,\ z = s$ ואז $x = 2 - 4s - 3t$

   ובצורה וקטורית $\begin{pmatrix} 2 - 4s - 3t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   למערכת זאת 2 דרגות חופש(s, t) .

   מספר דרגות החופש= מספר המשתנים פחות עמודות הציר ($2 = 3 - 1$).

   גם פה שימו לב כי $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרון פרטי למערכת הלא הומגנית

   ו $t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון כללי למערכת ההומגנית.

3. שאלה: למה בוחרים דווקא את המשתנים החופשיים שרירותית והמשתנים התלויים נקבעים אוטומטית ולא להיפך?

   תשובה: נסתכל בדוגמא $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ כלומר $x + 0y = 2$ ברור כי x הוא משתנה תלוי ו y משתנה חופשי.

   כעת אם נבחר את $y = t$ שרירותית נוכללבטא את x בעזרת t־ $x = 2 - 0t = 2$

   והפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$והכל טוב אבל אם נבחר את $x = t$ שרירותית אזי לא

נוכל לבטא את y
בעזרת t כי נקבל $t+0y=2$ וכמובן שלא ניתן לבודד את y

תרגיל: פתור את המערכת הבאה:
$$\begin{cases} ix+2y-z=-3 \\ \quad y+5z=6 \\ x+(1-2i)y+(5+i)z=3i \end{cases}$$

פתרון

נעבור למטריצה
$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1-2i & 5+i & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1-2i & 5+i & 3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+iR_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

כלומר אין פתרון.

צורה קנונית

הגדרה־ תהא מטריצה A.הצורה הקנונית של מצריצה Aהיא מטריצה המתקבלת ע"י פעולות אלמנטריות ו

ונראית סכמטית כך
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מקיימת:

- המטריצה בצורה מדורגת
- יש אפסים גם מעל הצירים (כל העמודה של הצירים היא אפסים מלבד הציר)
- כל ציר שווה ל־1

הערות:

1. משפט :הצורה הקנונית של מטריצה היא יחידה (בניגוד לצורה מדורגת).
2. דברים שבולטים (יחסית) בצורה הקנונית־ מספר עמדות ציר,מספר דרגות חופש והפתרון למערכת

תרגיל: נתון שהמטריצה הבאה בצורה קנונית ־השלם מספרים אפשריים
$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & 1 \\ * & * & * & 0 & * & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל סיכום:

עבור איזה k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, ∞פתרונות, אין פתרון $\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$?

פתרון:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(1+1+k) & 1-k \end{array}\right)
\end{aligned}$$

אם $k=1$ נקבל בשורה השנייה והשלישית שורות אפסים ויהיה ∞פתרונות

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ והפתרון $\begin{pmatrix} 1-s-t \\ t \\ s \end{pmatrix}$

אם $k=-2$ נקבל בשורה השלישית $0=3$ ואין פתרון.

בכל מקרה אחר כל הצירים יהיו שונים מ־0 + צורה מדורגת ולכן יהיה פתרון יחיד.

הערה: ניתן להמשיך לצורה קנונית על מנת למצוא את הפתרון היחיד כפונקציה של k.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right)$ והפתרון הוא $\begin{pmatrix} \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$

תרגיל־נכון/לא נכון (אם יש זמן)

1. למערכת משוואות המיוצגת כמטריצה 4×2 אין פיתרון ־ לא נכון $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. הצורה המדורגת יחידה־ לא נכון $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. למטריצה בגודל $n \times m$ יש לכל היותר m צירים־ נכון

4. למערכת משוואות עם ∞פתרונות תהיה לפחות שורת אפסים אחת במטריצה המקושרת אליה ־ נכון

5. בצורה הקנונית יש איבר בכל טור יחיד ששונה מאפס־ לא נכון, רק בעמודות עם הצירים $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

6. הצורה המדורגת של מטריצה A בגודל $n \times 1$ היא A־ נכון

7. הצורה הקנונית של מטריצה A בגודל $n \times 1$ היא A־ לא נכון $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$