

**הגדרה**

$X$  מ"מ. **השונות** (*Variance*) היא:

$$V(X) = E\left((x - E(X))^2\right)$$

$$= E(X^2 - 2E(X) \cdot X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

**הערה**

אם  $X \geq 0$  אז גם  $E(X) \geq 0$ .

**מסקנה**

השונות תמיד אי שלילית,

$$E(X)^2 \leq E(X^2)$$

השונות מודדת את ה"רוחב" של ההתפלגות של  $X$ .

**השוואה****מדגם : משתנה מקרי**

ממוצע: תוחלת

סטיית התקן: שונות  $\sqrt{\quad}$

**הערות**

$$E(\alpha X) = \alpha \cdot E(X)$$

$$V(\alpha X) = \alpha^2 \cdot V(X)$$

בנוסף, תמיד:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 =$$

$$E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 =$$

$$= V(X) + V(Y) + 2 \underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{Cov(X,Y)}$$

**הגדרה**

$$E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ה- **Covariance**:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

זו פונקציה בי-לינארית, סימטרית.

$$Cov(X, X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X) \geq 0$$

**הגדרה**

$X, Y$  בלתי מתואמים אם  $Cov(X, Y) = 0$

**נוסחה**

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$

**מסקנה**

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \Leftrightarrow X, Y \text{ בלתי מתואמים}$$

**הגדרה**

$X, Y$  מ"מ.

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}}$$

"מקדם המתאם"

**טענה**

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

**הוכחה**

לפי אי שוויון קושי – שורץ עבור המכפלה הפנימית  $Cov(\cdot, \cdot)$ , המשרה את הנורמה

$$\|X\| = \sqrt{V(X)}$$

**הגדרה**

נניח שדגמנו  $n$  זוגות

$$x_1, \dots, x_n$$

$$y_1, \dots, y_n$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, S_y^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

מקדם המתאם הוא :

$$\rho_{x,y} = \frac{\frac{1}{n} \sum ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{S_x \cdot S_y}$$

תרגיל: אי שוויון קושי – שורץ עבור המכפלה הפנימית הסטנדרטית על  $\mathbb{R}^n$  :

$$-1 \leq \rho_{x,y} \leq 1$$

(פונקציית CORREL בExcel)

**תזכורת**

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

**פירוק השונות**

$X, Y$  מ"מ

$$V(E(X|Y)) = E(E(X|Y)^2) - \underbrace{E(E(X|Y))^2}_{E(X)}$$

$$E(V(X|Y)) = E(E(X^2|Y)) - E(E(X|Y)^2)$$

$$\Rightarrow V(X) = VE(X|Y) + EV(X|Y)$$

$$V(X) = VE(X|Y) + EV(X|Y)$$

$$V(X) = 0 + V(X) \text{ ב"ת } X, Y \text{ .1}$$

$$V(X) + 0 \cdot X = f(Y) \text{ .2}$$

$$E(V(X|Y)) = \sum_y P(Y = y) \cdot V(X|Y = y)$$

### 2.3 התפלגויות בדידות

התפלגות ברנולי:

פרמטר-  $0 < p < 1$ , ברנולי  $b(p)$  מתפלג לפי  $X \sim$  אם

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

לדוגמה: הטלת מטבע הוגן מתפלג  $b(\frac{1}{2})$

$$E(X) = p$$

$$X^2 = X$$

לכן

$$E(X^2) = E(X) = p$$

מכאן ש-

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p \cdot q_{=1-p}$$

התפלגות בינומית:

פרמטרים  $n, 0 \leq p \leq 1$ .

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

סופר הצלחות בסדרה של  $n$  ניסויי ברנולי.

$$0 \leq X \leq n$$

ההתפלגות היא:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

בדיקה:

$$\sum_{k=0}^n P(X = K) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

חישוב התוחלת:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot k = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} p^{k-1+1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} = n \cdot p(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$