תרגיל בית 3 אינפי 3

1. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $a_n \in X$ סדרה. הוכיחו כי $a_n \to a$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה P כך ש $a \in P$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \in P$.

2. נסמן כרגיל ב d_1, d_2, d_∞ את מטריקות $1, 2, \infty$ על $\mathbb{R}^n$.

(א) הוכיחו כי אם P קבוצה פתוחה ביחס לאחת המטריקות האלה, היא פתוחה גם ביחס לאחרות.

(למשל: P : פתוחה ביחס ל d_1 אם לכל $x \in P$ קיים $r > 0$ כך ש

$$B(x,r) = \{y \mid d_1(y,x) < r\} \subseteq P$$

לכאורה ייתכן שביחס למטריקה אחרת זאת לא תהיה קבוצה פתוחה).

(ב) הסיקו בעזרת שאלה 1 שסדרה מתכנסת במרחב המטרי $(\mathbb{R}^n, d_1)$ אם ורק אם היא מתכנסת ב $(\mathbb{R}^n, d_2)$ אם ורק אם היא מתכנסת ב $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.

3. יהי $X = \mathbb{R}^n$ ונסמן ב d את המטריקה הדיסקרטית

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

אפיינו את הקבוצות הפתוחות ואת הסדרות המתכנסות ביחס למטריקה זו.

4. תהי $a_n \in \mathbb{R}^n$ סדרה של וקטורים. באופן טבעי נאמר כי הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

מתכנסת. הוכיחו כי אם טור המספרים

$$\sum_{k=1}^{n} ||a_k||$$

מתכנס אזי גם טור הוקטורים

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס.