

# תרגיל להגשה באלגברה מופשטת 1

## 88-211 סמסטר א' תשע"ו

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא עד 22.1.16.

**שאלה 1.** תהי  $G$  חבורה.

א. הוכיחו כי  $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ .

ב. נניח ש- $\text{Aut}(G)$  היא חבורה ציקלית. הוכיחו כי  $G$  אבליית.

ג. תהיינה  $G$  ו- $H$  חבורות סופיות, ונניח ש- $(|G|, |H|) = 1$ . הוכיחו כי

$$\text{Aut}(G \times H) \cong \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(H)$$

**שאלה 2.** הוכיחו שאם בחבורה  $G$  יש מחלקת צמידות עם בדיוק שני איברים, אזי יש ב- $G$  תת-חבורה נורמלית.

**שאלה 3.** מיינו את כל החבורות הסופיות שיש להן שתי מחלקות צמידות.

**שאלה 4.** כתבו את חבורת המנה  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z}(4,6)$  כסכום ישר של חבורות ציקליות.

**הגדרה.** תהיינה  $G, H$  ו- $N$  חבורות, ויהיו  $f : H \rightarrow G$  ו- $g : G \rightarrow N$  הומומורפיזמים. אומרים שהדיאגרמה

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{e\}$$

היא **סדרה מדויקת קצרה**, אם  $f$  חד-חד ערכית,  $g$  על ו- $\ker g = \text{Im } f$ .

**שאלה 5.** תהי

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{e\}$$

סדרה מדויקת קצרה.

א. הוכיחו כי

$$G/f(H) \cong N$$

ב. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. קיים הומומורפיזם  $r : G \rightarrow H$  שעבורו  $r \circ f = \text{Id}_H$ .

2. קיים הומומורפיזם  $s : N \rightarrow G$  שעבורו  $g \circ s = \text{Id}_N$ .

3. קיימת תת-חבורה  $K \leq G$  שעבורה  $K \cong \text{Im } f \oplus K$ .

**שאלה 6.** תהי  $G$  חבורה מסדר  $2n$ , כאשר  $n$  אי-זוגי. הוכיחו שיש ל- $G$  תת-חבורה מאינדקס 2.  
(רמז: משפט קיילי).

**שאלה 7.** תהי  $G$  תת-חבורה מסדר 36 של  $A_6$ . יש בה שמונה-עשר איברים מסדר 4 ותשעה איברים מסדר 2.

א. מהם סדרם של יתר האיברים?

ב. מהם מבני המחזוריים של איברי החבורה, וכמה איברים בדיוק יש מכל מבנה?  
(רמז: הפעילו את הלמה של ברנסייד).

ג.  $G$  פועלת על  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , ככל תת-חבורה של  $S_6$ . הוכיחו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

בהצלחה!