תרגיל להגשה באלגברה מופשטת 1
88-211 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא עד 22.1.16.

שאלה 1. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי $\mathrm{Inn}\left(G\right) \lhd \mathrm{Aut}\left(G\right)$.

ב. נניח ש-$\mathrm{Aut}\left(G\right)$ היא חבורה ציקלית. הוכיחו כי G אבלית.

ג. תהיינה G ו-H חבורות סופיות, ונניח ש-$\left(\left|G\right|, \left|H\right|\right) = 1$. הוכיחו כי

$$\mathrm{Aut}\left(G \times H\right) \cong \mathrm{Aut}\left(G\right) \times \mathrm{Aut}\left(H\right)$$

שאלה 2. הוכיחו שאם בחבורה G יש מחלקת צמידות עם בדיוק שני איברים, אזי יש ב-G תת-חבורה נורמלית.

שאלה 3. מיינו את כל החבורות הסופיות שיש להן שתי מחלקות צמידות.

שאלה 4. כתבו את חבורת המנה ${}^{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}/_{\mathbb{Z}(4,6)}$ כסכום ישר של חבורות ציקליות.

הגדרה. תהיינה G, H ו-N חבורות, ויהיו $f: H \to G$ ו-$g: G \to N$ הומומורפיזמים. אומרים שהדיאגרמה

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{e\}$$

היא **סדרה מדויקת קצרה**, אם f חד-חד ערכית, g על ו-$\ker g = \mathrm{Im}\, f$.

שאלה 5. תהי

$$\{e\} \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{e\}$$

סדרה מדויקת קצרה.

א. הוכיחו כי

$${}^{G}/_{f(H)} \cong N$$

ב. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים כאשר החבורות G, H ו-K אבליות:

1. קיים הומומורפיזם $r: G \to H$ שעבורו $r \circ f = \mathrm{Id}_H$.
2. קיים הומומורפיזם $s: N \to G$ שעבורו $g \circ s = \mathrm{Id}_N$.
3. קיימת תת-חבורה $K \leq G$ שעבורה $G \cong K \oplus \mathrm{Im}\, f$ כסכום ישר פנימי[1].

[1]סכום ישר פנימי הוא כמו מכפלה ישרה פנימית; צריך להוכיח ש-$K, \mathrm{Im}\, f \lhd G$, $K \cap \mathrm{Im}\, f = \{e\}$ ו-$K \cdot \mathrm{Im}\, f = G$

שאלה 6. תהי G חבורה מסדר $2n$, כאשר n אי-זוגי. הוכיחו שיש ל-G תת-חבורה מאינדקס 2.

(**רמז:** משפט קיילי).

שאלה 7. תהי G תת-חבורה מסדר 36 של A_6. יש בה שמונה-עשר איברים מסדר 4 ותשעה איברים מסדר 2.

א. מהם סדרם של יתר האיברים?

ב. מהם מבני המחזורים של איברי החבורה, וכמה איברים בדיוק יש מכל מבנה?
(**רמז:** הפעילו את הלמה של ברנסייד).

ג. G פועלת על $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ככל תת-חבורה של S_6. הוכיחו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

בהצלחה!