

מתמטיקה בדידה – פתרון תרגיל 4

שאלה 1

תהי קבוצה לא ריקה A ותהי פונקציה $f : A \rightarrow A$. נגדיר פונקציה $g : A \rightarrow P(A)$ ע"י

$$g(a) = f^{-1}[f[\{a\}]] \Delta f[f^{-1}[\{a\}]]$$

א. הוכח/הפוך: אם g אינה חח"ע אז f חח"ע

ב. הוכח/הפוך: אם f חח"ע אז g אינה חח"ע

ג. הוכח/הפוך: אם f על אז g חח"ע

א. **הפרכה:** $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 3$ אינה חח"ע ומתקיים:

$$g(3) = g(4) = \emptyset$$

ב. **הפרכה:** $A = \{1\}$ כל פונקציה היא חח"ע כאשר המקור מכיל איבר אחד בלבד.

ג. **הפרכה:** $A = \{1, 2\}, f(1) = 1, f(2) = 2$ אבל $g(1) = g(2) = \emptyset$

שאלה 2

יהיו A, B קבוצות סדורות חלקית. תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה המקיימת

$$\forall x, y \in A : x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$$

א. נניח B סדורה באופן מלא. הוכח/הפוך: $\forall x, y \in A : x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

ב. נניח A סדורה באופן מלא. הוכח/הפוך: $\forall x, y \in A : x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

א. **הפרכה:** ייתכן ולא ניתן להשוות בין אף שני איברים במקור, ולכן הנתון מתקיים באופן ריק וכל פונקציה תהווה הפרכה אם במקור יש 2 איברים ומעלה.

ב. **הפרכה:** לכל $x, y \in A$ נתון כי $x \leq y$ גורר $f(x) \leq f(y)$.

בכיוון ההפוך, נניח כי $f(x) \leq f(y)$. כיוון ש A סדורה באופן מלא מקיים $x \leq y$ או $x \geq y$. אם

$x \geq y$ אז לפי הנתון $f(x) \geq f(y)$ ולכן $f(x) = f(y)$. מכאן אנו למדים על דוגמא נגדית:

ניקח פונקציה כלשהי שאינה חח"ע, ואז כיוון ש $f(x) = f(y)$ ניתן להשוות את התמונות בשני

הכיוונים ואילו את המקורות ניתן להשוות בכיוון אחד בלבד.

שאלה 3

תהי פונקציה $f: A \rightarrow B$. נגדיר יחס R על $P(B)$ על ידי $(X, Y) \in R \Leftrightarrow f^{-1}[X] \Delta f^{-1}[Y] = \emptyset$.
הוכח/הפרך: יחס שקילות.

הפרכה: רפלקסיביות וסימטריות ברורים, אבל טרנזיטיביות נכשלת. ניקח את פונקצית הזהות, עבורה מתקיים $f^{-1}[X] = X$ ולכן $\{1, 2\} R \{4, 5\} \wedge \{4, 5\} R \{1, 3\}$ אבל לא מתקיים היחס בין הקבוצות $\{1, 2\}, \{1, 3\}$

שאלה 4

תהי פונקציה $f: A \rightarrow B$. נגדיר פונקציה $g: P(B) \rightarrow P(A)$ ע"י $g(X) = f^{-1}[X]$

א. הוכח/הפרך: $Y \in \text{im}(g)$ (התמונה) אם"ם $f^{-1}[f[Y]] = Y$

ב. הוכח/הפרך: g חח"ע אם"ם f הפיכה

ג. הוכח/הפרך: g אינה על

א. **הוכחה:**

הכיוון הראשון טריוויאלי שכן אם $f^{-1}[f[Y]] = Y$ אזי לפי הגדרה $g(f[Y]) = Y$ ולכן $Y \in \text{im}(g)$

בכיוון השני, נניח $Y \in \text{im}(g)$ לכן קיימת X כך ש $g(X) = Y$. לפי הגדרה

$f^{-1}[f[Y]] = \{a \in A : f(a) \in f[Y]\}$ ברור אם כך ש $Y \subseteq f^{-1}[f[Y]]$. נניח בשלילה שהם לא

שווים, לכן קיים $x \notin Y$ כך ש $f(x) \in f[Y]$. אבל לפי ההגדרה של $f[Y]$ קיים $y \in Y$ כך ש $f(x) = f(y)$.

לכן, אם $f^{-1}[X] = Y = g(X) = f^{-1}[X] = \{a \in A : f(a) \in X\}$ אזי $f(x) = f(y) \in X$ ולכן $x \in f^{-1}[X] = Y$. בסתירה.

ב. **הפרכה:**

ניקח $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, f(1) = f(2) = 1$.

לכן $g(\emptyset) = \emptyset, g(\{1\}) = \{1, 2\}$ כלומר g חח"ע, וכמובן ש f אינה חח"ע ולכן אינה הפיכה.

ג. **הפרכה:**

ניקח $A = B = \{1\}, f(1) = 1$. לכן $g(\emptyset) = \emptyset, g(\{1\}) = \{1\}$ כאשר $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ ולכן g על

שאלה 5

תהי קבוצה X ותהי פונקציה $f: X \rightarrow X$. תהיינה $A, B \subseteq X$. הוכח/הפוך:

$$f[A \setminus B^c] = f[A] \setminus (f[B])^c$$

הפרכה:

$f(n) = 2n$ ונגדיר את A להיות קבוצת הזוגיים ו B קבוצת האי זוגיים.

$$f[A] \setminus (f[B])^c = f[A] \setminus B = f[A] \text{ ואילו } f[A \setminus B^c] = f[\emptyset] = \emptyset \text{ כעת}$$

שאלה 6

תהי קבוצה לא ריקה A . תהי קבוצה $B \subseteq P(A)$ כך שלכל $X, Y \in B$ מתקיים $X = Y$ או $X \cap Y = \emptyset$. נניח עוד כי קיימת פונקציה $f: B \rightarrow A$ המקיימת $\forall X \in B: f(X) \in X$

א. הוכח/הפוך: f חח"ע

ב. הוכח/הפוך: f על

ג. הוכח/הפוך: $B \neq P(A)$

ד. הוכח/הפוך: $f[B] = A$ אם"ם $\cup B = A$ ו B מכילה נקודונים בלבד

א. הוכחה: נניח $f(X) = f(Y) = a$ לפי ההגדרה $a \in X \wedge a \in Y$ ולכן $a \in X \cap Y$ ולכן

$$X = Y \text{ ולכן } X \cap Y \neq \emptyset$$

ב. הפרכה: $f(\{1\}) = 1$, $B = \{\{1\}\}$, $A = \{1, 2\}$. לכן אין מקור.

ג. הוכחה: $\emptyset \notin B$ אחרת הפונקציה f אינה מוגדרת היטב כי לא קיים איבר בקבוצה הריקה. ולכן

$$B \neq P(A)$$

ד. הוכחה: $f[B] = A$ לכן לכל $a \in A$ קיים $X \in B$ כך ש $a \in X$. לכן $\cup B = A$. נניח וקיים

$X \in B$ שאינו נקודון. ראינו שהוא לא יכול להיות קבוצה ריקה, לכן הוא מכיל שני איברים שונים

$a, b \in X$. לפי הנתונים שני האיברים הללו לא יכולים להיות באף קבוצה אחרת ששייכת ל B ,

ולכן לאחד מהם אין מקור, בסתירה.

בכיוון ההפוך, נניח $\cup B = A$ ו B מכילה נקודונים בלבד. כיוון $\cup B = A$ לכל $a \in A$ קיימת

קבוצה $X \in B$ כך ש $a \in X$. כיוון ש B מכילה נקודונים בלבד, $X = \{a\}$ ולכן בהכרח

$$f(X) = a$$

$$f[B] = A \text{ לכן}$$

שאלה 7

א. הוכח לפי ההגדרה כי $|(0,1)| = |[0,1]|$

פתרון במערכי התרגול אשר באתר.

ב. תהי A קבוצה אינסופית. הוכיחו שקיים יחס שקילות על A בעל שני מחלקות שקילות שכל

אחת מהן מעוצמה שווה ל A . (רמז: מותר להשתמש בעובדה ש $|A| = |A \times \{1,2\}|$)

כיוון ש $|A| = |A \times \{1,2\}|$ קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A \rightarrow A \times \{1,2\}$. יחס השקילות הרצוי מוגדר

על ידי: שני איברים ב A שקולים אם"ם f שולחת אותם לזוג סדור עם אותו המספר בחלק הימני.

מחלקות השקילות הינן $f^{-1}(A \times \{1\}), f^{-1}(A \times \{2\})$. כיוון שזו פונקציה הופכית,

$$|f^{-1}(A \times \{2\})| = |A \times \{2\}| = |A|, |f^{-1}(A \times \{1\})| = |A \times \{1\}| = |A|$$

ג. הוכח לפי ההגדרה כי $|P(A)| = |\{f \mid f: A \rightarrow \mathbb{Z}_2\}|$ (כלומר עוצמת קבוצת החזקה שווה

לעוצמת קבוצת כל הפונקציות הני"ל)

פתרון במערכי התרגול אשר באתר.