פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 7: תורת הקוונטים: פונקצית דלתא, יחסי חילוף, ערכי תוחלת ואופרטורים

1. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול $\epsilon \to 0$).

   (א) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}$, $-\infty \le x \le \infty$

   (ב) $f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2}\sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \le \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

2. נתונה פונקצית גל חד מימדית המתאימה למצב היסוד של בור פוטנציאל אינסופי. $\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$. חשבו את $\langle x\rangle, \Delta x, \langle p\rangle, \Delta p$.

3. הוכיחו את התכונות הבאות של יחסי חילוף

   (א) אנטי סימטריות $[A,B] = -[B,A]$

   (ב) $[A, f(A)] = 0$

   (ג) $[A, Const] = 0$

   (ד) לינאריות $[A+B, C] = [A,C] + [B,C]$

   (ה) $[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$

   (ו) זהות יעקובי $[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$

   (ז) אם $[B,[A,B]] = 0$ אז $[A,B^n] = nB^{n-1}[A,B]$
   (הגדירו $g_n = [A,B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n = Bg_{n-1} + g_1B^{n-1}$. כעת רשמו את g_n כסכום $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} B^k g_1 B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n = nB^{n-1}g_1$ כאשר $[B,g_1] = 0$).

4. משפט ארנפסט (Ehrenfest) מתאר את הדינמיקה של מרכז המסה של חלקיק קוונטי ושל תוחלת התנע שלו, בהשפעת פוטנציאל V:
   $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p_x\rangle}{m}, \ \frac{d\langle p_x\rangle}{dt} = -\left\langle \frac{dV}{dx}\right\rangle$. הראו ע"י שמוש במשפט ארנפסט כי מרכז המסה של פונקצית הגל $\psi(x)$ של אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $\hat{V} = m\omega^2\hat{x}^2/2$ נע ע"פ המשוואה הקלאסית $\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = -\omega^2\langle x\rangle$

5. הוכיחו כי לכל וקטור $|\varphi\rangle$ במרחב הילברט E_H מתקיים $\|U\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ ($\langle U\varphi|U\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$) אם ורק אם U אופרטור יוניטרי. כלומר אופרטור U

שומר על נורמה אם ורק אם $U^\dagger = U^{-1}$.
(הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in E_H$, ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$ והסיקו כי U יוניטרי).