פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 7: תורת הקוונטים: יחסי חילוף, אופרטורים, בור פוטנציאל ואוסילטור הרמוני

1. הוכיחו את התכונות הבאות של יחסי חילוף

   (א) אנטי סימטריות $[A,B]=-[B,A]$

   (ב) $[A,f(A)]=0$

   (ג) $[A,Const]=0$

   (ד) לינאריות $[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$

   (ה) $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$

   (ו) זהות יעקובי $[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0$

   (ז) אם $[B,[A,B]]=0$ אז $[A,B^n]=nB^{n-1}[A,B]$
   (הדרכה: הגדירו $g_n=[A,B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n=Bg_{n-1}+g_1B^{n-1}$. כעת הוכיחו כי ניתן לרשום את g_n כסכום $g_n=\sum_{k=0}^{n-1}B^kg_1B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n=nB^{n-1}g_1$ כאשר $[B,g_1]=0$).

2. הוכיחו כי אופרטור U משמר נורמה במרחב הילברט H אםם הוא יוניטרי ($U^\dagger=U^{-1}\iff \|U\varphi\|=\|\varphi\|,\ \forall\ |\varphi\rangle\in H$).

   (הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle+\lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle,|\chi\rangle\in H$, ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית עבור $\lambda=1$ ו $\lambda=i$ והסיקו כי U יוניטרי).

3. נתונה פונקצית גל חד מימדית המתאימה למצב היסוד של בור פוטנציאל אינסופי $\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) & 0\le x\le a\\ 0 & \text{else}\end{cases}$. חשבו את $\langle x\rangle,\Delta x,\langle p\rangle,\Delta p$.

4. נתונה מדרגת פוטנציאל $V(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -V_0 & x\ge 0\end{cases}$.

   (א) אלומת פוטונים בעלת אנרגיה קינטית $E=30eV$ מגיעה מ $x=-\infty$ ונתקלת במדרגת הפוטנציאל ב $x=0$ כאשר $V_0=10eV$. איזה חלק מהאלומה יוחזר ? איזה חלק יעבור את מדרגת הפוטנציאל ?

   (ב) איך היתה משתנה התשובה ל 4א אם החלקיקים היו אלקטרונים במ-קום פרוטונים ?

5. (א) הוכיחו את משפט ארנפסט (Ehrenfest):
יהי A אופרטור ו H המילטוניאן. אזי

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle,$$

כלומר התוחלת של אופרטור A מקיימת את משוואת התנועה הקלאסית

(ב) הראו ע"י שמוש במשפט ארנפסט כי מרכז המסה של פונקצית הגל של אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $\hat{V} = m\omega^2\hat{x}^2/2$ נע ע"פ המשוואה הקלאסית $\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} + \omega^2\langle x\rangle = 0$

6. נתונה חבילת גלים באוסילטור הרמוני חד מימדי. $|\psi(0)\rangle$ מתאר חלקיק הנע בפוטנציאל הרמוני עם תדירות ω ב $t = 0$. נבטא מצב זה בעזרת המצבים העצמיים של ההמילטוניאן $|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$.

(א) רשמו ביטוי למקדמים c_n (בהצגת bra, ket)

(ב) בהינתן ש $|\psi(0)\rangle$ מנורמל, מהו התנאי שמקיימים המקדמים c_n ?

(ג) רשמו את $|\psi(t)\rangle$ עבור $t > 0$

(ד) מצאו את התוחלת של האנרגיה $\langle H\rangle_t = \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$. האם ערך זה תלוי בזמן ?

(ה) הראו כי התוחלת של המקום $\langle x\rangle_t$ מקיימת

$$\langle x\rangle_t = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}|c_n c_{n+1}| \cos(\phi_{n+1} - \phi_n - \omega t).$$

(הדרכה: רשמו $c_n = |c_n|e^{i\phi_n}$ והשתמשו באופרטורי יצירה והשמדה $a, a^\dagger$ על מנת לחשב את אלמנטי המטריצה $\langle m|x|n\rangle$)

(ו) הראו מפורשות כי התוחלת של המקום $\langle x\rangle_t$ מקיימת את משוואת התנועה הקלאסית $\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} + \omega^2\langle x\rangle = 0$