

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 3: סדרות וטורים של מספרים מרוכבים

1. משפט:

$$z_n \rightarrow z_0 \text{ אם } \Re(z_n) \rightarrow \Re(z_0); \Im(z_n) \rightarrow \Im(z_0)$$

הוכחה:

כוון א: נניח כי $z_n \rightarrow z_0$ כלומר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |\Re(z_n) - \Re(z_0) + i(\Im(z_n) - \Im(z_0))|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Re(z_n) - \Re(z_0))^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\Im(z_n) - \Im(z_0))^2 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(z_n) = \Re(z_0), \lim_{n \rightarrow \infty} \Im(z_n) = \Im(z_0) \text{ ולכן}$$

כוון ב: נניח כי $\Re(z_n) \rightarrow \Re(z_0); \Im(z_n) \rightarrow \Im(z_0)$ כלומר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\Re(z_n) - \Re(z_0)| + \lim_{n \rightarrow \infty} |\Im(z_n) - \Im(z_0)| = 0$$

ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0$

2. הראו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ כאשר $z_n = i^n$ לא קיים.

נרשום $\arg(z_n) = \tan^{-1} \frac{n\pi}{2}$, $|z_n| = 1$ כעת, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$ ואילו $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(z_n)$ לא קיים. על כן, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ לא קיים.

3. בדקו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n / 2^n$ מתכנס.

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(1+i)^n / 2^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^n / 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/\sqrt{2})^n < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n / 2^n < \infty$$

4. הוכיחו כי לכל $|z| < 1$ הטור הגאומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ מתכנס וסכומו $1/(1-z)$.

נרשום את סדרת הסכומים החלקיים

$$s_n = \sum_{k=1}^n z^k = (z^{n+1} - 1)/(z - 1) \text{ כעת}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} - 1)/(z - 1)$$

נשאר להראות כי $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ באמת, $|z| < 1$ וסיימנו. לכל $|z| < 1$