נכתב על ידי נועם יערי

תיקון לסוף שיעור קודם:

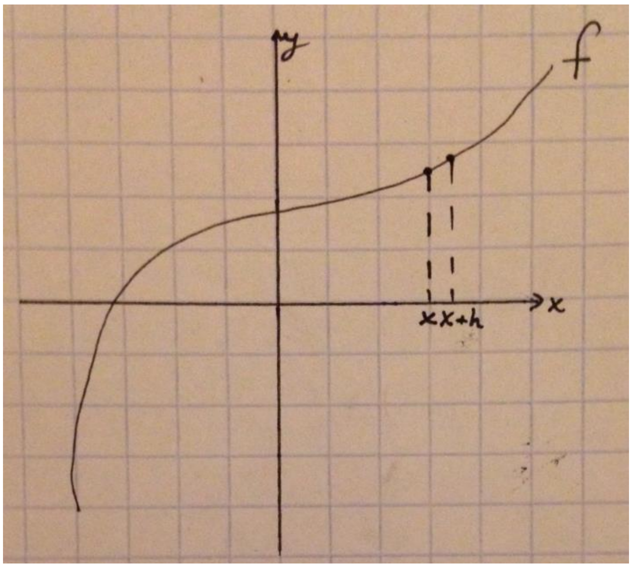
$\log x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ולכן $e^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ שתיהן חד חד ערכיות, על (ממשפט ערך הביניים), רציפות, עולות.

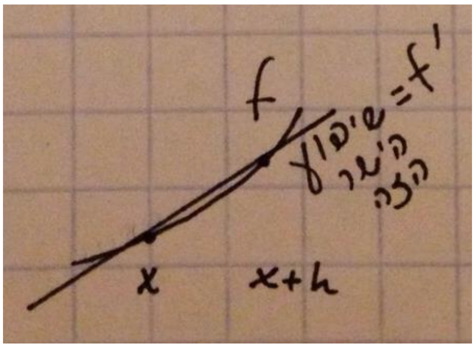
<u>נגזרות</u>

הגדרה

תהי f מוגדרת בקטע סגור $[a,b]$ ותהי $a<x<b$. **הנגזרת של f** בנקודה x מוגדרת להיות היא הגבול:

$$f'(x) \coloneqq \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$





גבול השיפועים כאשר $h\to 0$. "שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x,f(x))$"

הגדרה

f גזירה בנקודה x אם: יש $a<b$ כך ש f – מוגדרת ב - $[a,b]$, $a<x<b$, והנגזרת $f'(x)$ קיימת.

דוגמאות

פונקציה קבועה: $\boldsymbol{c'=0}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0\overset{h\to 0}{\to}0$$

נכתב על ידי נועם יערי

$x' = 1$:

$$\frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \overset{h\to 0}{\to} 1$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$: ($n \in \mathbb{N}$)

$$\frac{\overbrace{(x+h)^n}^{(x+h)\cdots(x+h)=x^n+nx^{n-1}h+h^2(\cdots)+\cdots} - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \overbrace{h^2(\dots)}^{\to 0}}{h} \overset{h\to 0}{\to} nx^{n-1}$$

$(\sin x)' = \cos x$:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x + \sin h}{h} \overset{\cos h = 1-2\sin^2\frac{h}{2}}{\cong} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\sin x\left(-2\sin^2\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\to 0} + \cos x \cdot \overbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)}^{\to 1}$$

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \overset{h\to 0}{\to} 1$$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$:

$$\frac{(\log(x+h)-\log x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\log\left(\frac{x+h}{h}\right) = \log\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \overset{h\to 0}{\to} e$$

עובדה: $(1+t)^{\frac{1}{t}} \overset{t\to 0}{\to} e$ (היה בשיעורי בית).

מרציפות log, $\log\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \overset{h\to 0}{\to} \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

נכתב על ידי נועם יערי

$(e^x)'=e^x$:

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

$$\frac{\overbrace{e^h-1}^{t}}{h}=\frac{t}{\log(1+t)}$$

$$t=e^h-1$$

$$log\ \ 1+t=e^h$$

$$\log 1+t=h$$

כאשר $0\neq t=e^h-1\to 0{,}0\neq h\to 0$

$$\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{\log(1+t)-\log 1}{t}\overset{t\to 0}{\to}\log' 1=1$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\log(1+t)}\overset{t\to 0}{\to} 1$$

הערה

אם $y=f(x)$ פונקציה גזירה בכל הנקודות הפנימיות בקטע $[a,b]$, אז $f'(x)$ מוגדר לכל $a<x<b$, ונקבל פונקציה f' המוגדרת בקטע הפתוח (a,b). מסמנים:

$$f'(x)=y':=\frac{dy}{dx}\coloneqq\frac{df}{dx}$$

הערה

אם נגדיר נגזרת מימין ומשמאל בנקודה x:

$$f'_+(x)\coloneqq\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

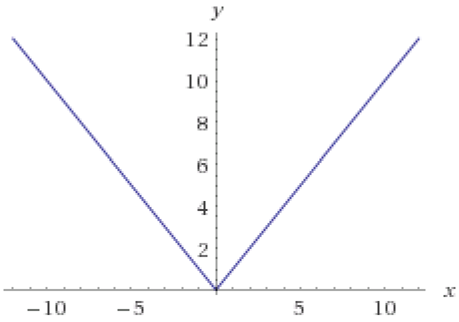
$$f'_-(x)\coloneqq\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

נקבל: f גזירה ב x – $\Leftrightarrow$ $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ שווים וקיימים.

נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

$$f(x) = |x|$$



אינה גזירה ב – 0.

כאן, מחישוב ישיר של הגבול $f_+'(0) = 1 \neq -1 = f_-{}'(0)$

למרות שהפונקציה רציפה במידה שווה ב - $\mathbb{R}$.

למה

אם f גזירה בנקודה a, אז f רציפה בנקודה a.

הוכחה

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{t\to 0}{\to} f'(a)$$

$$\Rightarrow h_{\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right)_{\to 0}$$

$$= f(a+h) - f(a) - h_{\to 0} \cdot f'(a)$$

$$f(a+h) - f(a) \overset{h\to 0}{\to} 0 \Leftarrow$$

$$\Rightarrow f(a+h) \overset{h\to 0}{\to} f(a)$$

$$\blacksquare$$

לכל הלמות הבאות, נניח ש - u, v פונקציות גזירות בנקודות בהן מחושבת הנגזרות.

למה

$$(u+v)' = u' + v'$$

הוכחה

$$\frac{\big(u(x+h)+v(x+h)\big)-\big(u(x)+v(x)\big)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$\overset{h\to 0}{\to} u'(x) + v'(x)\blacksquare$$

נכתב על ידי נועם יערי

למה

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

הוכחה

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$\frac{1}{h}\big(u \cdot (x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)\big)$$

$$= \frac{\overbrace{\big(u(x+h) - u(x)\big)}^{\overset{h\to 0}{\to} u\prime(x)}}{h} \cdot \overbrace{\overbrace{v(x+h)}^{\overset{h\to 0}{\to} v(x)}}^{\text{רציפה ב X } v} + u(x) \cdot \frac{\overbrace{v(x+h) - uv(x)}^{\overset{h\to 0}{\to} v\prime(x)}}{h} \overset{h\to 0}{\to}$$

$$\overset{h\to 0}{\to} u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \blacksquare$$

מסקנה

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

הוכחה

$$(cu)' = \underbrace{c'}_{0} u + u'c = cu' \blacksquare$$

למה

אם $v \neq 0$ (לפחות בסביבה של x), אז:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

הוכחה

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\overbrace{v(x) - v(x+h)}^{\overset{h\to 0}{\to} -v\prime(x)}}{h} \cdot \overbrace{\frac{1}{v(x+h) \cdot v(x)}}^{\overset{h\to 0}{\to} v(x)} \overset{h\to 0}{\to} \frac{-v'(x)}{v(x)^2} \quad \blacksquare$$

מסקנה

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

הוכחה

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + \left(\frac{1}{v}\right)' \cdot u = \cdots = \frac{u'v - v'u}{v^2} \blacksquare$$

נכתב על ידי נועם יערי

למה

אם f הפיכה בסביבת a ו - $f'(a)$ קיימת ושונה מאפס ו - f^{-1} רציפה ב - $b := f(a)$ אז
$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ (מסמנים: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$)

הוכחה

נסמן $y := f(x)$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\xrightarrow{x \to a} f'(a)}}$$

($x: a + h, h := x - a$)

f^{-1} רציפה ב $- b$, לכן $x := f^{-1}(y) \overset{y \to b}{\rightarrow} f^{-1}(b) = a$

לכן, $\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$

■

דוגמה

$$(e^x)' = (\log^{-1} x)' = \frac{1}{(\log y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

כלל השרשרת

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot \overbrace{f'(x)}^{\text{הנגזרת הפנימית}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ה

הגה