

88-236 חשבון אינפיניטיסימלי 4

תרגיל בית 1

תאריך הגשה: 10.08.2001

1. היעזר במשפט קושי-בינה כדי למצוא:

א. שטח של מקבילית ב- \mathbb{R}^4 כאשר צלעותיו

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ב. נפח של מקבילון תלת-מימדי ב- \mathbb{R}^4 כאשר צלעותיו

$$\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. מצא ללא חישוב ישיר של אינטגרלים את:

א. שטח של אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

ב. נפח של אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

3. יהי $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, כך ש-

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

ויהי $A \subset \mathbb{R}^n$ תחום הנתון

ע"י: $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq 1$. מצא $Vol_n(T(A))/Vol_n(A)$

4. יהי $q(x)$ פונקציה רציפה מעל \mathbb{R} . נניח כי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקיימות משוואות דיפרנציאליות הבאות: $f'(x) = q(x) \cdot f(x)$ ו- $g''(x) = q(x) \cdot g(x)$. צריך לבטא את השטח של

מקבילית $A(x)$ הנפרס על ידי $\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$ במונחים של $A(0)$.

$$5. \text{ נתונה מערכת משוואות: } \begin{cases} f(x, u, v) = 0 \\ g(y, u, v) = 0 \\ h(z, u, v) = 0 \end{cases}$$

א. נסחו תנאים מספיקים על מנת ש- z, u, v יהיו מוגדרים כפונקציות סתומות של x, y בראשית.

$$6. \text{ ב. בתנאי סעיף א', הוכיחו: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_x}{h_z} \cdot \frac{\frac{\partial(h, g)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \text{ כאשר } \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

א. חשבו $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ כאשר D_R הוא מעגל ברדיוס R סביב הראשית.

ב. חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (רמז: היעזרו בסעיף א').

7. א. חשבו $\iint_{D_R} (x^2 + y^2) dx dy$ כאשר $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ תוך שימוש במשפט פויבני (ללא החלפת משתנים).

ב. חשבו $\iint_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dx dy$ כאשר $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-x \leq y \leq 4-x, 4x^3 \leq y \leq 16x^3\}$.

8. חשבו את האינטגרל $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ בעמצאות מעבר לקואורדינטות גליליות או

כדוריות כאשר פונקציה $f(x, y, z)$ ותחום V (המשטחים המגבילים):

א. $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ב. $V: z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0), z = h, f(x, y, z) = z$

ג. $V: 2z = x^2 + y^2, z = 2, f(x, y, z) = x^2 + y^2$

ד. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, f(x, y, z) = \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

9. א. כתבו את משוואות של מישורי המשיק P_1, P_2, P_3 למשטח $z = Ax^2 + By^2$ בנקודות

$q = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ ומצאו את הנקודה $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

ב. מצאו את הנפח של טטראדר בעל קודקודים: q, p_1, p_2, p_3 .

10. מצאו משוואת מרחב משיק של:

א. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4)$ בנק' $p = (1, 0, 1, 0)$.

ב. $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1, x_1, x_2, x_2^2 - x_1^2)$ בנק' $p = (1, 2)$.