מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 9 תשע"ח.

1. מצאו את $|\mathrm{conj}(\sigma)|$ כאשר $\sigma = (2573) \in S_{14}$.

פתרון:

אנו נדרשים למצוא את מספר התמורות שצמודות ל-σ. ידוע לנו שהתמורות היחידות שצמודות למחזור מאורך 4 הן מחזורים מאורך 4. מספר המחזורים האלו הוא

$$|\mathrm{conj}(\sigma)| = \binom{14}{4}(4-1)! = 6006$$

2. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה G על $\mathbb{R}^2$ היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0,1)$ ושל $(1,1)$.

(א) $G = \mathbb{R}$ עם הפעולה $t * (x,y) = (x+t, y+2t)$.

(ב) $G = \mathbb{Z}$ עם הפעולה $t * (x,y) = (tx, t^2x)$.

(ג) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ עם פעולה $A * (x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

i. מתקיים:

$$\begin{aligned}(t+s)*(x,y) &= (x+t+s, y+2(t+s)) = (x+t+s, y+2t+2s) \\ &= s*(x+t, y+2t) = t*(s*(x,y))\end{aligned}$$

$$0*(x,y) = (x+0, y+0) = (x,y)$$

ולכן זו פעולה של חבורה על קבוצה. נתאר את המסלולים:

$orb\,(0,1) = \{t*(0,1) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 1+2t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ (זהו הגרף של הישר $y = 1+2x$).

$orb\,(1,1) = \{t*(1,1) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 1+2t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ (זהו הגרף של הישר $y = 2x-1$).

א'. זו לא פעולה של חבורה על קבוצה. כי למשל $0*(x,y)=(0,0)\neq(x,y)$.

ב'. זו פעולה של חבורה על קבוצה (כידוע מלינארית). נתאר את המסלולים:

$$orb\,(0,1)=\left\{A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mid A\in GL_2(\mathbb{R})\right\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$orb\,(1,1)=\left\{A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mid A\in GL_2(\mathbb{R})\right\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

3. תהי G חבורה שפועלת על קבוצה X. נגדיר יחס על X באפן הבא: $x\sim y$ אם קיים $g\in G$ כך ש $gx=y$.

(א) הוכיחו שזהו אכן יחס שקילות. (הערה: מחלקות השקילות הן המסלולים. כלומר, מחלקת השקילות של x היא $orb(x)$)

רפלקסיבי: $x=ex$ ולכן $x\sim x$.

סימטרי: נניח $x\sim y$ כלומר, קיים $g\in G$ כך ש $gx=y$. אזי $g^{-1}y=g^{-1}(gx)=(g^{-1}g)x=ex=x$. לכן $y\sim x$.

טרנזיטיבי: נניח $x\sim y$ ו $y\sim z$. כלומר, קיימים $g,h\in G$ כך ש $gx=y,hy=z$. מתקיים: $(hg)x=h(gx)=hy=z$. לכן $x\sim z$.

(ב) הוכיחו שאם $x\sim y$ אז $stab(x)$ צמוד ל$stab(y)$, כלומר, קיים g כך ש$stab(x)=g(stab(y))g^{-1}$.

פתרון:

i. אם x,y הם באותו מסלול אזי יש $g\in G$ כך ש $x=g*y$.
אזי

$$\begin{aligned}Stab(x)&=\{a\in G|a*x=x\}=\{a\in G|a*(g*y)=g*y\}\\&=\left\{a\in G|\underbrace{g^{-1}ag}_{b}*y=y\right\}=\left\{gbg^{-1}|b*y=y\right\}\\&=g^{-1}\left\{b\in G|b*y=y\right\}g=g^{-1}Stab(y)g\end{aligned}$$

4. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X ונגדיר

$$G_0=\{g\in G|g*x=x\,\forall x\in X\}$$

(א) הוכיחו שG_0 היא תת חבורה של G
הוכחה:

לפי הגדרה, $G_0 = \bigcap_{x \in X} stab(x)$.

הוכחנו בכיתה שלכל x, $stab(x)$ היא תת חבורה של G, וידוע שחיתוך של תת חבורות הוא תת חבורה.

(ב) הוכיחו שG_0 תת חבורה נורמלית.
הוכחה:

יהי $g \in G_0$ ו$h \in G$. רוצים להוכיח ש$hgh^{-1} \in G_0$... כלומר, שלכל $x \in X$ $(hgh^{-1})x = x$. ובכן, $(hgh^{-1})x = (hg)(h^{-1}x) = h(g(h^{-1}x)) = h(h^{-1}x) = (hh^{-1})x = ex = x$. המעבר השלישי נובע מכיוון ש$g \in G_0$.

(ג) נגדיר פעולה של G/G_0 על X ע"י: $(gG_0)x = gx$. הוכיחו שהפעולה מוגדרת היטב, כלומר לא תלויה בבחירת הנציג. (אין צורך להוכיח שזאת אכן פעולה)
הוכחה:

יהיו $g_1, g_2 \in G$ כך ש$g_1G_0 = g_2G_0$. זה אומר ש $g_2^{-1}g_1 \in G_0$. כלומר, קיים $h \in G_0$ כך ש $g_1 = g_2h$. רוצים להראות שלכל $x \in X$ $g_1x = g_2x$, כלומר, $g_2x = (g_2h)x$. ובכן, $(g_2h)x = g_2(hx) = g_2x$ מכיוון ש$hx = x$.

(ד) הוכיחו שהפעולה מהסעיף הקודם נאמנה.
הוכחה:

נניח שקיים $g \in G$ כך שלכל $x \in X$ $gG_0x = x$. אבל, $gG_0x = gx$. כלומר, $gx = x$ לכל $x \in X$. לכן, $g \in G_0$ וקיבלנו ש $gG_0 = G_0$, האיבר הטריוויאלי בחבורה G/G_0 .

5. חשבו את $stab(x)$ במקרים הבאים:

(א) G פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל, x איבר כלשהו בחבורה.
פתרון:

המייצב של x זה כל ה$y \in G$ כך ש: $yx = x$. נכפיל בx^{-1} מימין, ונקבל $y = e$. כלומר, לכל $x \in G$, $stab(x) = \{e\}$.

(ב) S_4 פועלת על פולינומים עם 4 משתנים, x שווה לפולינום $x_1 + x_2$.
פתרון:

המייצב של $x_1 + x_2$ זה כל הפולינומים שלא נוגעים ב1 וב2, או שמחליפים את 1 ב2. כלומר, $stab(x_1 + x_2) = \{id, (3,4), (1,2), (1,2)(3,4)\}$.

6. מצאו את מחלקות הצמידות בחבורה:

(א) S_3.

פתרון:

בS_3 יש 3 מבני מחזורים אפשריים ולכן נקבל 3 מחלקות צמידות:

$$\{\{\mathrm{id}\},\{(12),(13),(23)\},\{(123),(132)\}\}$$

(ב) D_4.

כאן נשתמש בתובנה הבאה: אם $A\subseteq D_4$ קבוצה שכל האיברים בה צמודים ובנוסף היא מקיימת שלכל $a\in A$

$$\sigma a\sigma^{-1}\in A$$

ו

$$\tau a\tau^{-1}\in A$$

אז A מחלקת צמידות.

הסבר: צריך להראות לכל $g\in G$ ולכל $a\in A$ חייב להתקיים

$$gag^{-1}\in A$$

עכשיו $g=\tau^l\sigma^k$ עבור l ו k כלשהם. לפי הנתון

$$\sigma a\sigma^{-1}\in A$$

הפעלה שוב ושוב תתן לנו ש

$$\sigma^k a\sigma^{-k}\in A$$

ואז

$$\tau\sigma^k a\sigma^{-k}\tau^{-1}\in A$$

הפעלה שוב ושוב תתן לנו

$$\tau^l\sigma^k a\sigma^{-k}\tau^{-l}\in A$$

כלומר

$$gag^{-1}\in A$$

עשינו למעשה תרגיל דומה בכיתה לגבי תת חבורות נורמליות.
עכשיו אפשר לגשת לפתור את השאלה.
שוב id הוא מחלקת צמידות בפני עצמו. כמו כן σ^2הוא מחלקת צמידות בפני עצמו כי

$$\sigma\sigma^2\sigma^{-1} = \sigma^2$$

ו

$$\tau\sigma^2\tau^{-1} = \sigma^2\tau\tau = \sigma^2$$

עכשיו, σ ו σ^3 הם מחלקת צמידות בפני עצמה כי

$$\sigma\sigma^k\sigma^{-1} = \sigma^k$$

ואילו

$$\tau\sigma\tau = \sigma^3$$

$$\tau\sigma^3\tau = \sigma$$

עכשיו נשאר להבין את האיברים מהצורה $\tau\sigma^k$. τ עם $\tau\sigma^2$ באותה מחלקת צמידות כי

$$\tau\tau\tau^{-1} = \tau$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma^{-2} = \tau\sigma^2$$

ואין עוד איברים במחלקה כי

$$\tau\tau\sigma^2\tau^{-1} = \tau\sigma^2$$

$$\sigma\tau\sigma^2\sigma^{-1} = \tau$$

באופן דומה מראים ש $\tau\sigma$ ו $\tau\sigma^3$ באותה מחלקה ולכן לסיכום המחלקות הן:

$$\{\{\mathrm{id}\}, \{\sigma^2\}, \{\sigma, \sigma^3\}, \{\tau, \tau\sigma^2\}, \{\tau\sigma, \tau\sigma^2\}\}$$

7. תהי X קבוצת כל הלוחות 2×2 שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש $2^4 = 16$ לוחות כאלה. ניקח $G = \mathbb{Z}_4$ ונגדיר פעולה באופן הבא: לכל $a \in \mathbb{Z}_4$ הלוח המתקבל $a * x$ הוא סיבוב הלוח x ב $90 \cdot a$ מעלות. מצאו את כל המסלולים (מה האיברים בכל מסלול?). כמה מסלולים יש?
טוב. בואו נגיד ש 1 זה שחור ו 0 זה לבן אז המסלולים הם כאלה:

מסלול 1: $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

מסלול 2: $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

מסלול 3: $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

מסלול 4: $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$

מסלול 5: $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$

מסלול 6: $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$