

מרצה: דר' ארז שיינר

משך המבחן: שלוש שעות

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'

ענו על כל השאלות

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)(\sqrt{x+1}-1)}{1-\cos(x)} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \cdot \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}_{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x - 1} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x - 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty}, L'Hopital \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^n \quad \text{ג.}$$

קל להוכיח שבסיס החזקה שואף לאחד ולכן מותר להשתמש בכלל ה-e

$$\left(\frac{n+2}{n-1} \right)^n \rightarrow e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n+2}{n-1} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n-1}} = e^3$$

2.

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)+1} dx \quad \text{א. חשבו את}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(e^x)}{x^2} dx \quad \text{ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס}$$

3. יהי $a \in \mathbb{R}$. מצאו כמה שורשים יש לפונקציה $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + a$, הוכיחו תשובתכם.

נתחיל בהליך החקירה

$$f'(x) = e^x - x$$

קשה לדעת מה הסימן של הנגזרת, כי אי אפשר למצוא את השורשים שלה באופן אלגברי. נחקור גם אותה!

$$f''(x) = e^x - 1$$

כאשר $x \geq 0$ אז $f''(x) \geq 0$

כאשר $x \leq 0$ אז $f''(x) \leq 0$

כלומר הנגזרת $f'(x)$ יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$ ולכן $f'(x)$ מקבלת מינימום גלובאלי ב $x = 0$

$$f'(0) = 1$$

כלומר, $f' \geq 1$, כלומר הפונקציה המקורית עולה תמיד!

לכן לפונקציה המקורית יש לכל היותר שורש יחיד.

כעת, אי אפשר ממש להציב ערכים בפונקציה המקורית בגלל הפרמטר שאין לנו יודעים את ערכו.

מה עושים בחדוא כשאי אפשר להציב? מחשבים גבול!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x - \frac{x^2}{2} + a = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{2e^x} + \frac{a}{e^x} \right) = \{\infty(1 - 0 + 0)\} = \infty$$

לכן קיימת נקודה x_2 בה $f(x_2) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} e^x - \frac{x^2}{2} + a = \{0 - \infty + a\} = -\infty$$

לכן קיימת נקודה x_1 בה $f(x_1) < 0$

וכיוון ש f רציפה, לפי ערך הביניים היא חותכת את הציר בין x_1, x_2 .

4. תהיינה פונקציות f, g כך שמתקיים כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = 0$.

א. הוכיחו שאם $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

מה אסור לעשות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \neq 0$$

השלילה של גבול מסוים, היא שזה לא הגבול. ייתכן שיש גבול אחר, אך ייתכן גם שאין גבול כלל! אז מה כן?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \left\{ 0 \cdot \frac{1}{\infty} \right\} = 0$$

ב. הוכיחו/הפריכו: אם זה לא נכון ש $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ אזי בהכרח $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

הפרכה:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$g(x) = 1 - D(x)$$

$$f(x)g(x) = D(x) - D^2(x) = D(x) - D(x) = 0$$

בעוד $f \cdot g \rightarrow 0$ ל f, g אין גבול.

ג. חזרו על סעיף ב', אם נתון ש f, g רציפות.

עדיין הפרכה:

רעיון כללי – ניקח פונקציות שהן אפס רוב הזמן, חוץ ממשולשים בגובה 1 פעם בכמה זמן. נניח פונקציה אחת עולה ל 1 מעל השלמים הזוגיים, והפונקציה השנייה עולה ל 1 מעל השלמים האי זוגיים. שתיהן רציפות, לשתיהן אין גבול באינסוף. כמו כן, המכפלה תהיה תמיד אפס. משאיר לקוראים ניסוח של פתרון מדוייק.

5. תהי סדרה a_n המקיימת כי $a_{n+1} > 2a_n + 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, וכמו כן $a_1 > 0$.
א. הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n > a_n + 1$$

נוכיח באינדוקציה (מקוצרת) שהסדרה חיובית; בדיקה $a_1 > 0$; אם $a_n > 0$ אז $a_{n+1} > 2a_n + 1 > 0$
ולכן

$$a_{n+1} - a_n > a_n + 1 \geq 1 > 0$$

ואכן הסדרה עולה, תביאו לי 10 נקודות.

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$.

אם a_n חסומה היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו L

נשאיף את שני צידי אי השיוויון, ונקבל כי

$$L > 2L + 1$$

$$L < -1$$

אבל זה עומד בסתירה לכך שהסדרה עולה ולכן

$$L \geq a_1 > 0$$

ולכן הסדרה אינה חסומה.

$$a_n \rightarrow \infty$$

ולכן

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

ב. קרבו את $\frac{1}{\sqrt{e}}$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$.