מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 4

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. לכל אחד מהיחסים R הבאים, קבעו (לכל תכונה בנפרד) האם רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי. אם זה יחס שקילות, ציינו מה הן מחלקות השקילות.
   א) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $(a\equiv b(\bmod 2))\vee(a\equiv b(\bmod 3))$.
   ב) $((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ אם $x_1=x_2$.
   ג) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם a מחלק את b.
   ד) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a+b$ זוגי.
   ה) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a+b$ אי-זוגי.
   ו) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a\le b$.
   ז) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a^2=b^2$.
   ח) $(a,b)\in R\subseteq\mathbb{Z}^2$ אם $a<b$.
2. הוכיחו: חיתוך של משפחה לא ריקה של יחסי שקילות $\{R_i\}_{i\in I}$ הוא יחס שקילות.
3. כמה יחסי שקילות אפשר להגדיר על הקבוצה $A=\{1,2,3\}$?
4. הוכיחו: כל יחס שקילות על קבוצה מסדר אי-זוגי יהיה מסדר אי-זוגי.
5. קראו את העמודים המצורפים מהספר "מבוא לתורת הקבוצות" של שמרון אברהם וענו על השאלות הבאות:
   א) הוכח וספק דוגמה של הכלה ממש $\overline{\lim}(X_n\setminus Y_n)\subseteq\overline{\lim}X_n\setminus\underline{\lim}Y_n$
   ב) מצא $\overline{\lim}A_n$ ו-$\underline{\lim}A_n$ עבור הסדרה

$$A_n=\begin{cases}\left(0,1-\frac{1}{n}\right), & 2\mid n\\ \left[\frac{1}{n},n\right), & 2\nmid n\end{cases}$$

(5.) (א.) $X\times(Y\cup Z) = (X\times Y)\cup(X\times Z)$.

(ב.) $X\times(Y\cap Z) = (X\times Y)\cap(X\times Z)$.

(ג.) $X\times(Y-Z) = (X\times Y)-(X\times Z)$.

*<u>סדרות של קבוצות</u>

<u>1.14 הגדרה</u>: בהנתן סדרת הקבוצות $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, <u>הגביל העליון</u> של הסדרה הנה קבוצת כל האיברים x השייכים ל- X עבור אינסוף מהאינדכסים n. הגבול העליון של $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מסומן ב- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$. <u>הגבול התחתון</u> של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ הנה קבוצת כל האיברים x השייכים לכל הקבוצות X_n פרט אולי למספר סופי מהן. הגבול התחתון של $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מסומן ב- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$.

<u>הערה</u>: מן ההגדרה ברור ש-:

(1.) $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ אם ורק אם לכל $n\in N$ קיים $m\in N$ כך ש-$m>n$ ו- $x\in X_m$.

(2.) $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ אם ורק אם קיים $n_0\in N$ כך ש- $x\in X_n$ לכל $n\geq n_0$.

(3.) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$

בטענה הבאה ניתן הצגה מפורשת של $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ ו- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$.

<u>1.15 טענה</u>: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות. אזי מתקיים:

(1.) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{m\geq n} X_m \right)$.

(2.) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap\limits_{m\geq n} X_m \right)$.

<u>הוכחה</u>: (.1) $x\in\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ אם ורק אם לכל $n\in N$ קיים $m\in N$ כך ש-$m>n$ ו-$x\in X_m$ אם ורק אם לכל $n\in N$ $x\in \bigcup_{m\geq n} X_m$ אם ורק אם $x\in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{m\geq n} X_m)$.

(.2) $x\in\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ אם ורק אם קיים $n_0\in N$ כך ש-$x \in X_n$ לכל $n\geq n_0$ אם ורק אם קיים $n_0\in N$ כך ש-$x \in \bigcap_{m\geq n_0} X_m$ אם ורק אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{m\geq n} X_m)$.

□

<u>דוגמאות</u>: (.1) אם $X_n = [0,\frac{n}{n+1}]$ $n = 1,2,\dots$ אזי $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = [0,1)$

(.2) אם $X_n = \begin{cases} [0,1], & n \text{ איזוגי} \\ [-1,0], & n \text{ זוגי} \end{cases}$ אזי $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = [-1,1]$ ו-$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \{0\}$

<u>1.16 הגדרה</u>: (.1) אם בהנתן הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ אזי נאמר שהסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>מתכנסת</u> ונכתוב $\lim_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ ונקרא לקבוצה $\lim_{n\to\infty} X_n$ <u>הגבול</u> של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(.2) סדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $X_n\subset X_{n+1}$ לכל $n\in N$ נקראת סדרה <u>עולה</u> וכאשר $X_n\supset X_{n+1}$ לכל $n\in N$ הסדרה נקראת <u>יורדת</u>. סדרה שהיא או עולה או יורדת נקראת סדרה <u>מונוטונית</u>.

<u>1.17 טענה</u>: סדרה מונוטונית $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות מתכנסת. אם הסדרה עולה אזי $\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ואם הסדרה היא יורדת אזי $\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.

<u>הוכחה</u>: תרגיל.

הקשר בין הפעולה של משלים מחד לבין הפעולות של גבול עליון וגבול תחתון מאידך, מבוטא בטענה הבאה.

<u>1.18 טענה</u>: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות חלקיות של הקבוצה X ותהי Y קבוצה חלקית של X. אזי:

(.1) $Y - \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty}(Y-X_n)$.

(.2) $Y - \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}(Y-X_n)$.

בפרט מתקיים: $\underline{\lim}_{n\to\infty} X'_n = (\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n)'$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty} X'_n = (\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n)'$.

<u>הוכחה</u>: (.1) = $Y - \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = Y - \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m\geq n} X_m\right) = Y\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m\geq n} X_m\right)'\right) =$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(Y\cap\left(\bigcup_{m\geq n} X'_m\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n}(Y-X_m)\right) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(Y-X_n)$$

(.2) תרגיל.

□