תרגיל 7 – מבוא לאנליזה 1

1. הראו שהגבולות הבאים לא קיימים בעזרת הגדרת הגבול עפ"י היינה (סדרות):

(א) $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$: נסמן $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{n}$ מתקיים $\boldsymbol{x_n \to 0}$, $x_n \neq 0$ וכן

$$f(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n}} = 2^n \to \boldsymbol{\infty}$$

מצד שני עבור הסדרה $y_n = -\frac{1}{n}$ מתקיים $\boldsymbol{y_n \to 0}$, $y_n \neq 0$ וכן

$$f(y_n) = 2^{\frac{1}{y_n}} = 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to \boldsymbol{0}$$

לכן לפי היינה הגבול הנ"ל לא קיים (אפילו במובן הרחב).

(ב) $\lim_{x\to 0} cos\left(\frac{1}{x}\right)$: נסמן $f(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ מתקיים $\boldsymbol{x_n \to 0}$, $x_n \neq 0$ וכן

$$f(x_n) = cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = cos(2\pi n) = 1 \to \boldsymbol{1}$$

מצד שני עבור הסדרה $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$ מתקיים $\boldsymbol{y_n \to 0}$, $y_n \neq 0$ וכן

$$f(y_n) = cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = cos(\frac{\pi}{2} + \pi n) = 0 \to \boldsymbol{0}$$

לכן לפי היינה נובע שהגבול הנ"ל לא קיים.

2. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 7x^2 + 5}{4x^3 + x - 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^3}}{4 + \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = \frac{1 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

(ב)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1+x) - 2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

(ג) כיוון ש־$x \to -\infty$, מתקיים $x = -\sqrt{x^2}$ (שכן $x < 0$, בעוד ששורש ריבועי כפי שהגדרנו אותו הוא תמיד **אי־שלילי**. לכן כשמחלקים מונה ומכנה בחזקה הגבוהה (x) מקבלים

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{2}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x\to0}\frac{sin(3x)}{sin(5x)}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\cdot\frac{sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{sin(5x)}=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$$

כאן השתמשנו במשפט $\lim_{t\to0}\frac{sin(t)}{t}=1$ פעמיים, פעם עבור $t=3x$ ופעם עבור $t=5x$ (בשני המקרים $t\to0 \iff x\to0$).

(ב)

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot cos\left(x\right)}{sin(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{sin(2x)}\cdot\frac{x\cdot cos(x)}{2}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{sin(2x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{2}\cdot cos(x)=1\cdot0=0$$

כאשר הגבול הראשון על סמך $\lim_{t\to0}\frac{sin(t)}{t}=1$ כאשר $t=2x$, והגבול השני 0 כמכפלת פונקציה חסומה $cos(x)$ בפונקציה $\frac{x}{2}$ השואפת ל־0.

דרך אחרת: להיעזר בזהות $sin(2x)=2sin(x)cos(x)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot cos\left(x\right)}{sin(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot cos(x)}{2sin(x)cos(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2sin(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{sin(x)}=0\cdot1=0$$

(ג) $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+sin\left(\frac{1}{x}\right)}$: לכל $x>1$ מתקיים

$$\frac{2}{x+1}\le\frac{2}{x+sin\left(\frac{1}{x}\right)}\le\frac{2}{x-1}$$

ומתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}=0$. לפי כלל הסנדוויץ': $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+sin\left(\frac{1}{x}\right)}=0$

4. סווגו את נקודות אי־הרציפות הבאות (כלומר קבעו סליקה/סוג ראשון/סוג שני):

(א) $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ בנקודה $x=2$. נחשב את הגבולות החד־צדדיים:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to2^+}1=1$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}-1=-1$$

הגבולות החד־צדדיים קיימים וסופיים אך שונים, לכן $x = 2$ היא נקודת **אי־רציפות מסוג ראשון** (למעשה ניתן לרשום את $f(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$

כשב־$x = 2$ היא לא מוגדרת).

ב) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ בנקודה $x = 1$ ובנקודה $x = 4$.

בנקודה $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

כי $\lim_{x\to 1^+}(x-2) = -1$ ו־$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \infty$. לכן בנקודה $x = 1$ לפחות אחד הגבולות החד־צדדיים לא קיים במובן הצר, ומכאן שזו נקודת **אי־רציפות מסוג שני**.

בנקודה $x = 4$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}$$

ולכן זו נקודת **אי־רציפות סליקה**.

ג) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$ בנקודה $x = 3$.

נשים לב שהפונקציה כלל לא מוגדרת בסביבה שמאלית של $x = 3$ (שכן תחום ההגדרה הוא: $x^2 - 9 \geq 0$ וגם $x - 3 \neq 0 \iff x > 3$ או $x \leq -3$), ובוודאי הגבול החד־צדדי השמאלי $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ לא קיים, וזו נקודת **אי־רציפות מסוג שני**.