תרגיל בית 9 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהי $E/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה כך ש-$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_n$. הוכיחו כי יש ל-$E$ תת־שדה K כך ש-$[K:\mathbb{Q}] = 2$.

שאלה 2. חשבו את חבורות גלואה הבאות ואת סריג תת־החבורות שלהן. מצאו גם את סריג תת־השדות של ההרחבות המתאימות.

א. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$

ב. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 7$.

ג. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^7 - 1$.

שאלה 3. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות. אם לא, מצאו את הסגור הנורמלי (סגור גלואה) שלהן.

א. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

ב. $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$ כאשר ρ הוא שורש יחידה מסדר 7. רמז: זה קל לפי שאלה 2.

ג. $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^3)$.

שאלה 4. נסמן שורש יחידה $\rho = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ מסדר 3. חשבו את הפולינום המינימלי מעל $\mathbb{Q}$ של $\sqrt[3]{49} + 2\rho$. רמז: העזרו בשאלה 2 ובפעולה של חבורת גלואה המתאימה.

שאלה 5. תהי $E = \mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה. נניח שיש $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כך ש-$\sigma(\alpha) = \alpha^2$.

א. האם ייתכן כי $[E:\mathbb{Q}] = 2$? אם כן, מצאו α מתאים.

ב. האם ייתכן כי $[E:\mathbb{Q}] = 3$? אם כן, מצאו α מתאים.

שאלה 6. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E. נניח שחבורת גלואה $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא אבלית. יהי a שורש של $f(x)$.

א. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו כי $E = \mathbb{Q}(a)$.

שאלה 7. יהי F שדה ממאפיין שונה מ-2, ויהי K שדה הפיצול של פולינום מתוקן ספרבילי $f(x) \in F[x]$. נסמן את שורשי $f(x)$ ב-$\alpha_1, \dots, \alpha_n$. נגדיר את הדיסקרימיננטה של $f(x)$ להיות

$$\Delta(f) := \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

א. בדקו שהדיסקרמיננטה של x^2+bx+c זה מה שאתם חושבים שזה.
להראות שהדיסקרמיננטה של $x^3+ux+v \in \mathbb{Q}[x]$ היא $4u^3+27v^2$ זו רשות שהיא קצת יותר קשה. הדיסקרימיננטה כשמה כן היא: לפולינומים ב-$\mathbb{R}$ היא "מאבחנת" את מספר השורשים הממשיים.

ב. הוכיחו כי $\Delta(f) \in F$. רמז: חילופים ב-S_n.

ג. נתבונן ב-$G := \mathrm{Gal}(K/F)$ כתת־חבורה של S_n, ונסמן $G_0 = G \cap A_n$. הוכיחו כי $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right] = K^{G_0}$. רמז: מה היא ההגדרה של תמורה זוגית?

ד. הסיקו כי G משוכנת ב-A_n אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)} \in F$.

שאלה 8 (רשות לא קשה)**.** יהיו שני פולינומים

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, \qquad g(x) = (x^2-2)(x^2-3)$$

ראינו שיש להם את אותו שדה פיצול $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. כמובן שחבורת גלואה $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ פועלת על השורשים של $f(x), g(x)$. הזכרו כי השורשים של $f(x)$ הם $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}, \pm\sqrt{2} \mp \sqrt{3}$ ושל g הם $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$. הוכיחו כי הפעולות לא איזומורפיות.
רמז: בשפה פשוטה מבקשים להראות שלא משנה איך נמספר את השורשים, הפעולות שונות.
אפשר קודם לשים לב שתת־החבורות המתאימות ב-S_4 אינן צמודות למשל.

בהצלחה!