תרגיל 12 פתרונות

שאלה 1

$$D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2, \quad x \ge 0\} \quad \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

יש כאן כל מיני x^2+y^2 אז סביר לנסות הצבה פולארית $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.
נקבל שהתחום הוא

$$r^4 \le r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$r^2 \le \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

זה אומר שהתחום שלנו עבור θ הוא $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ כי מחוץ לתחום הזה $\cos^2\theta - \sin^2\theta < 0$
(נשים לב שאנחנו עובדים רק איפה ש $x \ge 0$)
ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=r^2 \\ dt=2rdr}}{=} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \frac{1}{2}\sqrt{1-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})\ (1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}(1-\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3})\mathrm{d}\theta$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta| + \frac{1}{3})\mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta$$

עכשיו

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

נזכור ש

$$\int \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=\cos\theta \\ dt=-\sin\theta d\theta}}{=} -\int (1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t = \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta$$

ולכן

$$-\frac{2\sqrt{8}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\ (\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\sqrt{8}}{3}(\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}+1)$$
$$= -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}\sqrt{8} = \frac{10}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{8}$$

האינטגרל שנשאר הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}$$

כלומר התוצאה הסופית היא:

$$\frac{10}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{8}+\frac{\pi}{6}$$

שאלה 2

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le Rx\}\ \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

נניח ש $R > 0$ (אם $R < 0$ הפתרון סימטרי ושווה).
גם כאן נראה סביר לנסות קוארדינטות פולריות
נקבל שהתחום הוא

$$r^2 \le Rr\cos\theta$$

כלומר

$$r \le R\cos\theta$$

כמובן שזה אפשרי רק כאשר $\cos\theta \ge 0$ כלומר כאשר $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\ (R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{R\cos\theta}\ \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta$$

האינטגרל השמאלי הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

את זה כבר חישבנו בשאלה הקודמת. מתקבל:

$$-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}R^3\ \left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{9}R^3$$

האינטגרל הימני הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}R^3$$

ולכן בסך הכל מתקבל

$$\frac{\pi}{3}R^3 - \frac{4}{9}R^3$$