תרגיל 12 פתרונות

שאלה 1

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2, \quad x \ge 0\}$$

יש כאן כל מיני x^2+y^2 אז סביר לנסות הצבה פולארית $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.
נקבל שהתחום הוא

$$r^4 \le r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$r^2 \le \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

זה אומר שהתחום שלנו עבור θ הוא $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ כי מחוץ לתחום הזה $\cos^2\theta - \sin^2\theta < 0$
(נשים לב שאנחנו עובדים רק איפה ש $x \ge 0$)
ולכן האינטגרל הוא:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=r^2 \\ dt=2rdr}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \frac{1}{2}\sqrt{1-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})\ (1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}(1-\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3})\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta| + \frac{1}{3})\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

עכשיו

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

נזכור ש

$$\int \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=\cos\theta \\ dt=-\sin\theta d\theta}}{=} -\int(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t = \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta$$

ולכן

$$-\frac{2\sqrt{8}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} + 1\right)$$
$$= -\frac{2}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{8} = \frac{10}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{8}$$

האינטגרל שנשאר הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}$$

כלומר התוצאה הסופית היא:

$$\frac{10}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{8} + \frac{\pi}{6}$$

שאלה 2

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le Rx\}$$

נניח ש $R > 0$ (אם $R < 0$ הפתרון סימטרי ושווה).
גם כאן נראה סביר לנסות קוארדינטות פולריות
נקבל שהתחום הוא

$$r^2 \le Rr\cos\theta$$

כלומר

$$r \le R\cos\theta$$

כמובן שזה אפשרי רק כאשר $\cos\theta \ge 0$ כלומר כאשר $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta$$

האינטגרל השמאלי הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

את זה כבר חישבנו בשאלה הקודמת. מתקבל:

$$-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}R^3\ (\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{9}R^3$$

האינטגרל הימני הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}R^3$$

ולכן בסך הכל מתקבל

$$\frac{\pi}{3}R^3 - \frac{4}{9}R^3$$

שאלה 3

$$\iiint_D xdxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, \quad x\ge 0\}$$

שיטה א': x היא פונקציה אי זוגית והתחום הרלוונטי הוא סימטרי ביחס ל x ולכן האינטגרל הוא 0.

שיטה ב':

נניח ש $a,b,c>0$ (אחרת צריך להיות במקומות המתאימים $-a,-b,-c$ והפתרון דומה)

נבצע החלפת משתנים

$$u=\frac{x}{a}, \quad v=\frac{y}{b}, \quad w=\frac{z}{c}$$

המטריצה של החלפת המשתנים היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה היא: $\frac{1}{abc}$.
לכן

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{1}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

כלומר:

$$\iiint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{D'} au(abc)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = a^2bc\iiint\limits_{D'} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

כאשר

$$D' = \{(x,y,z) \mid u^2+v^2+w^2 \le 1, \quad u \ge 0\}$$

כעת נשתמש בהחלפת קואורדינטות כדוריות ונקבל:

$$a^2bc\iiint\limits_{D'} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = a^2bc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (r^2\sin\varphi)(r\cos\theta\sin\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = a^2bc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (r^3\sin^2\varphi\cos\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{a^2bc}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 0$$

שאלה 4

$$\iiint\limits_D (x+y+z)dxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid \sqrt{y^2+z^2} \le x \le \sqrt{4-y^2-z^2}\}$$

מהתחום מתבקש להשתמש בקואורדינטות גליליות

$$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta$$

ואז התחום הוא:

$$r \le x \le \sqrt{4-r^2}$$

כמו כן, r מוגבל להיות בין 0 ל $\sqrt{2}$ (כי צריך ש $r \le \sqrt{4-r^2}$) ו θ חופשי, כלומר בין 0 ל 2π.

לכן האינטגרל הוא

$$\iiint\limits_D (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} \int\limits_0^{2\pi} r(x + r\cos\theta + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} (rx\theta + r\sin\theta - r\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}x\mathrm{d}r = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} 2\pi r x \mathrm{d}x\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \pi r x^2\Big|_r^{\sqrt{4-r^2}} \mathrm{d}r = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} (r(4-r^2) - r^3)\mathrm{d}r = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} (4r - 2r^3)\mathrm{d}r$$

$$= \pi(2r^2 - \frac{1}{2}r^4)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

שאלה 5

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2 dxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 3, \quad x^2+y^2 \leq 2z\}$$

התחימה $x^2+y^2+z^2 \leq 3$ גורמת לחשוב על קואורדינטות כדוריות, אבל $x^2+y^2 \leq 2z$ לא מתאים לזה כל כך. אז ננסה גליליות.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ואז התחום הופך להיות $r \leq \sqrt{3-z^2}$ ו $r \leq \sqrt{2z}$
התנאים האלה נפגשים כאשר

$$\sqrt{2z} = \sqrt{3-z^2}$$

$$2z = 3 - z^2$$

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

כלומר

$$z = 1$$

(נשים לב שהדרישה $x^2+y^2 \leq 2z$ מחייבת $z > 0$)

כמו כן התנאי $x^2+y^2+z^2 \le 3$ נותן את המגבלה $z \le \sqrt{3}$.
קיבלנו שבתחום $0 \le z \le 1$ r יכול להיות בתחום $[0,\sqrt{2z}]$ובתחום $1 \le z \le \sqrt{3}$ r יכול להיות בתחום $[0,\sqrt{3-z^2}]$.
נביט על האינטגרל:

$$\iiint_D (x+y+z)^2 dxdydz = \iiint_D (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz) dxdydz$$

נשים לב שהביטויים xy, xz הם אי זוגיים (ביחס ל x) והתחום הוא סימטרי ביחס ל x ולכן האינטגרל שלהם הוא 0.
בדומה, הביטוי yz הוא אי זוגי ביחס ל y בעוד שהתחום סימטרי ביחס ל y.
לכן נותרנו עם האינטגרל

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

אם נבצע את המעבר לקוארדינטת גליליות נקבל

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} \int_0^{2\pi} r(r^2+z^2) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} \int_0^{2\pi} r(r^2+z^2) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2+z^2) \mathrm{d}r \mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2+z^2) \mathrm{d}r \mathrm{d}z\right)$$

נחשב ראשית

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2+z^2) \mathrm{d}r \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 z^2\right)\Big|_0^{\sqrt{2z}} \mathrm{d}z = \int_0^1 z^2 + z^3 \mathrm{d}z = \frac{7}{12}$$

ו

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2+z^2) \mathrm{d}r \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 z^2\right)\Big|_0^{\sqrt{3-z^2}} \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(3-z^2)^2 + \frac{1}{2}(3-z^2)z^2\right) \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(9-6z^2+z^4) + \frac{1}{2}(3z^2-z^4)\right) \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{z}^4\right) \mathrm{d}z = \frac{9}{4} - \frac{1}{20} = \frac{44}{20}$$

ולכן התוצאה הסופית היא:

$$2\pi\left(\frac{44}{20} + \frac{7}{12}\right) = \frac{167}{30}\pi$$