

## תרגיל 12 פתרונות

### שאלה 1

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, \quad x \geq 0\}$$

יש כאן כל מיני  $x^2 + y^2$  אז סביר לנסות הצבה פולארית  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$   
 נקבל שהתחום הוא

$$r^4 \leq r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$r^2 \leq \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

זה אומר שהתחום שלנו עבור  $\theta$  הוא  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  כי מוחץ לתחום הזה  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta < 0$   
 (נשים לב שאנחנו עובדים רק איפה ש  $x \geq 0$ )  
 ולכן האינטגרל הוא:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} r \sqrt{1-r^2} dr d\theta \stackrel{\substack{t=r^2 \\ dt=2r dr}}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \frac{1}{2} \sqrt{1-t} dt d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right) (1-t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3} (1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{8} |\sin^3 \theta| + \frac{1}{3}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{8} |\sin^3 \theta|\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3}\right) d\theta \end{aligned}$$

עכשיו

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{8} |\sin^3 \theta|\right) d\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta d\theta$$

נזכור ש

$$\int \sin^3 \theta d\theta = \int \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \stackrel{\substack{t = \cos \theta \\ dt = -\sin \theta d\theta}}{=} - \int (1 - t^2) dt = \frac{1}{3} t^3 - t = \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta$$

ולכן

$$\begin{aligned}
-\frac{2\sqrt{8}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta d\theta &= -\frac{2\sqrt{8}}{3} \left( \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\sqrt{8}}{3} \left( \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= -\frac{2}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} \sqrt{8} = \frac{10}{9} - \frac{4}{9} \sqrt{8}
\end{aligned}$$

האינטגרל שנשאר הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{\pi}{6}$$

כלומר התוצאה הסופית היא:

$$\frac{10}{9} - \frac{4}{9} \sqrt{8} + \frac{\pi}{6}$$

## שאלה 2

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq Rx\}$$

נניח ש  $R > 0$  (אם  $R < 0$  הפתרון סימטרי ושווה).  
גם כאן נראה סביר לנסות קוארדינטות פולריות  
נקבל שהתחום הוא

$$r^2 \leq Rr \cos \theta$$

כלומר

$$r \leq R \cos \theta$$

כמוכן שזה אפשרי רק כאשר  $\cos \theta \geq 0$  כלומר כאשר  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \theta} r \sqrt{R^2 - r^2} dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R \cos \theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} (R^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} R^3 d\theta
\end{aligned}$$

האינטגרל השמאלי הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^3 \theta d\theta$$

את זה כבר חישבנו בשאלה הקודמת. מתקבל:

$$-\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^3 \theta d\theta = -\frac{2}{3} R^3 \left( \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{9} R^3$$

האינטגרל הימני הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} R^3 d\theta = \frac{\pi}{3} R^3$$

ולכן בסך הכל מתקבל

$$\frac{\pi}{3} R^3 - \frac{4}{9} R^3$$

### שאלה 3

$$\iiint_D x dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad x \geq 0\}$$

שיטה א':  $x$  היא פונקציה אי זוגית והתחום הרלוונטי הוא סימטרי ביחס ל  $x$  ולכן האינטגרל הוא 0.

שיטה ב':

נניח ש  $a, b, c > 0$  (אחרת צריך להיות במקומות המתאימים  $-a, -b, -c$  והפתרון דומה) נבצע החלפת משתנים

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{z}{c}$$

המטריצה של החלפת המשתנים היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה היא:  $\frac{1}{abc}$ .  
לכן

$$dudvdw = \frac{1}{abc} dx dy dz$$

כלומר:

$$\iiint_D x dx dy dz = \iiint_{D'} au(abc) dudvdw = a^2 bc \iiint_{D'} u dudvdw$$

כאשר

$$D' = \{(x, y, z) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1, \quad u \geq 0\}$$

כעת נשתמש בהחלפת קוארדינטות כדוריות ונקבל:

$$\begin{aligned} a^2 bc \iiint_{D'} u dudvdw &= a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \varphi)(r \cos \theta \sin \varphi) dr d\theta d\varphi = a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 \sin^2 \varphi \cos \theta) dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{a^2 bc}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi = 0 \end{aligned}$$

#### שאלה 4

$$\iiint_D (x + y + z) dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \mid \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2 - z^2}\}$$

מהתחום מתבקש להשתמש בקוארדינטות גליליות

$$x = x, \quad y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

ואז התחום הוא:

$$r \leq x \leq \sqrt{4 - r^2}$$

כמו כן,  $r$  מוגבל להיות בין 0 ל  $\sqrt{2}$  (כי צריך ש  $r \leq \sqrt{4 - r^2}$ ) ו  $\theta$  חופשי, כלומר בין 0 ל  $2\pi$ .

לכן האינטגרל הוא

$$\begin{aligned}
 \iiint_D (x+y+z) dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} r(x+r\cos\theta+r\sin\theta) d\theta dx dr = \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} (rx\theta+r\sin\theta-r\cos\theta) \Big|_0^{2\pi} dx dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} 2\pi r x dx dr \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi r x^2 \Big|_r^{\sqrt{4-r^2}} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (r(4-r^2)-r^3) dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4r-2r^3) dr \\
 &= \pi \left( 2r^2 - \frac{1}{2}r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi - 2\pi = 2\pi
 \end{aligned}$$

### שאלה 5

$$\iiint_D (x+y+z)^2 dx dy dz \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 3, \quad x^2+y^2 \leq 2z\}$$

התחימה  $x^2+y^2+z^2 \leq 3$  גורמת לחשוב על קוארדינטות כדוריות, אבל  $x^2+y^2 \leq 2z$  לא מתאים לזה כל כך. אז ננסה גליליות.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

ואז התחום הופך להיות  $r \leq \sqrt{2z}$  ו  $r \leq \sqrt{3-z^2}$   
 התנאים האלה נפגשים כאשר

$$\sqrt{2z} = \sqrt{3-z^2}$$

$$2z = 3 - z^2$$

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

כלומר

$$z = 1$$

(נשים לב שהדרישה  $x^2+y^2 \leq 2z$  מחייבת  $z > 0$ )

כמו כן התנאי  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$  נותן את המגבלה  $z \leq \sqrt{3}$ .  
 קיבלנו שבתחום  $0 \leq z \leq 1$  יכול להיות בתחום  $[0, \sqrt{2z}]$  ובתחום  $1 \leq z \leq \sqrt{3}$  יכול להיות בתחום  $[0, \sqrt{3-z^2}]$ .  
 נביט על האינטגרל:

$$\iiint_D (x+y+z)^2 dx dy dz = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) dx dy dz$$

נשים לב שהביטויים  $xy, xz$  הם אי זוגיים (ביחס ל  $x$ ) והתחום הוא סימטרי ביחס ל  $x$  ולכן האינטגרל שלהם הוא 0.  
 בדומה, הביטוי  $yz$  הוא אי זוגי ביחס ל  $y$  בעוד שהתחום סימטרי ביחס ל  $y$ .  
 לכן נותרנו עם האינטגרל

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

אם נבצע את המעבר לקוארדינטות גליליות נקבל

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} \int_0^{2\pi} r(r^2 + z^2) d\theta dr dz + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} \int_0^{2\pi} r(r^2 + z^2) d\theta dr dz \\ = 2\pi \left( \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2 + z^2) dr dz + \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2 + z^2) dr dz \right) \end{aligned}$$

נחשב ראשית

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2 + z^2) dr dz = \int_0^1 \left( \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 z^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2z}} dz = \int_0^1 (z^2 + z^3) dz = \frac{7}{12}$$

ו

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2 + z^2) dr dz &= \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 z^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{3-z^2}} dz = \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{4}(3-z^2)^2 + \frac{1}{2}(3-z^2)z^2 \right) dz \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{4}(9 - 6z^2 + z^4) + \frac{1}{2}(3z^2 - z^4) \right) dz = \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{9}{4} - \frac{1}{4}z^4 \right) dz = \frac{9}{4} - \frac{1}{20} = \frac{44}{20} \end{aligned}$$

ולכן התוצאה הסופית היא:

$$2\pi \left( \frac{44}{20} + \frac{7}{12} \right) = \frac{167}{30} \pi$$

שאלה 6

$$\iiint_D dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\}$$

נשתמש בקוארדינטות גליליות ונקבל שהתחום הוא:

$$1 \leq r \leq \sqrt{4 - z^2}$$

זה גם מגביל את  $z$  להיות בתחום  $[0, \sqrt{3}]$  ולכן האינטגרל הוא:

$$\begin{aligned} \iiint_D dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \int_0^{2\pi} r d\theta dr dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz = \pi \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \Big|_1^{\sqrt{4-z^2}} dz \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4 - z^2 - 1) dz = \pi \left( 3z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi(3\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

שאלה 7

$$\iiint_D dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

אם נעבור לקוארדינטות גליליות נקבל שהתחום הוא:

$$r \leq \sqrt{z^2}, \quad r \leq \sqrt{1 - z^2}$$

וזה בהכרח אומר ש  $z \in [-1, 1]$  (כי אחרת  $1 - z^2 < 0$ ). נקודת החיתוך

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{1 - z^2}$$

היא כאשר  $z = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ . כלומר, כאשר  $z$  נמצא בתחום  $-\sqrt{\frac{1}{2}} \leq z \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$  נקבל ש  $r$

נמצא בתחום  $0 \leq r \leq \sqrt{z^2}$  ואם  $\sqrt{\frac{1}{2}} \leq |z| \leq 1$  אז  $r$  נמצא בתחום  $0 \leq r \leq \sqrt{1 - z^2}$ .

נניח שאנו מסתכלים על התחום שבו  $z \geq 0$  (כי המצב בתחום השני סימטרי).

נקבל שהאינטגרל שצריך לחשב הוא:

$$\begin{aligned} \iiint_D dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_0^z \int_0^{2\pi} r d\theta dr dz + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{2\pi} r d\theta dr dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_0^z r dr dz + 2\pi \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz \end{aligned}$$

אחד האינטגרלים הוא:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_0^z r dr dz = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^z dz = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} z^2 dz = \frac{1}{6} z^3 \Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt{8}}$$

והשני הוא:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \frac{1}{2} (1-z^2) dz = \frac{z}{2} - \frac{1}{6} z^3 \Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{8}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

בסך הכל יתקבל

$$2\pi \left( \frac{1}{6\sqrt{8}} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12\sqrt{2}} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

בגלל שחישובנו הכל רק עבור  $z \geq 0$  צריך להכפיל את התוצאה ב 2 ונקבל:

$$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

## שאלה 8

$$\iint_D ye^{x^3} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

חישוב פשוט של האינטגרל נותן:

$$\iint_D ye^{x^3} dx dy = \int_0^1 \int_0^x ye^{x^3} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{6} e^{x^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} e$$